XXV відкрита Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики «Турнір Чемпіонів»

# Математика. Розв'язання задач

*Старша ліга*

**1.** Знайдіть всі невід'ємні корені рівняння:

$$x + \sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+2x} + \sqrt{x^2+3x+2} = 2.$$

**Розв'язання.** Оскільки $x \geqslant 0$, то рівняння можна переписати у вигляді

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 + \sqrt{x(x+1)} + \sqrt{x(x+2)} + \sqrt{(x+1)(x+2)} = 2.$$

Розклавши на множники ліву частину, отримаємо:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\right) = 2. \qquad (\star)$$

Помножимо обидві частини на додатній вираз $\sqrt{x+2}-\sqrt{x}$. Отримуємо рівняння, рівносильне заданому:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)2 = 2\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right),$$

звідки $\sqrt{x+2} = 2\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$. Піднесемо обидві частини до квадрату:

$$x+2 = 4x + 4\sqrt{x^2+x} + x + 1,$$

що рівносильне $1-4x = 4\sqrt{x^2+x}$. Тоді $1-4x \geqslant 0$ ($x \leqslant \frac{1}{4}$) і піднісши знову до квадрату, знаходимо:

$$1 - 8x + 16x^2 = 16x^2 + 16x,$$

звідки $x = \frac{1}{24}$.

*Відповідь.* $\frac{1}{24}$.

*Другий спосіб.* При $x \geqslant 0$ функції $y = x$, $y = \sqrt{x^2+x}$, $y = \sqrt{x^2+2x}$, $y = \sqrt{x^2+3x+2}$ зростаючі, тому їхня сума — теж зростаюча функція. Отже, рівняння має не більше ніж один корінь. При $x = 0$ ліва частина перетворюється в $\sqrt{2} < 2$, при $= \frac{1}{2}$ ліва частина більша за 2. Отже, між 0 та $\frac{1}{2}$ є корінь. Значення $x = \frac{1}{24}$ (знаходимо підбором) задовольняє рівнянню. Отже, це і є єдиний невід'ємний корінь.

**2.** По колу розташовано 10 пронумерованих фішок. Знайдіть кількість підмножин фішок, в яких є три фішки, що стоять підряд.

**Розв'язання.** Очевидно, що не підходять множини, які містять 1 або 2 фішки.

Всі множини, які містять 7 або більше фішок, підходять. Інакше має бути принаймні 4 фрагменти з вибраними фішками, а тому фішок не менше $7+4=11$. Таких множин $C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = 120+45+10+1 = 176$.

Якщо в множині 3 фішки, то вони повинні бути послідовними, починаючи з довільного із 10 місць. Всього 10 множин.

Якщо в множині 4 фішки, то вони можуть: а) йти послідовно, тоді таких множин 10; б) 3 фішки разом і одна окремо, тоді починатися трійка може з будь-якого із 10 місць, а одна фішка може стояти на будь-якому із 5 не сусідніх з ними місць. Всього 50 множин. Таким чином, всього є 60 множин, що містять рівно 4 фішки.

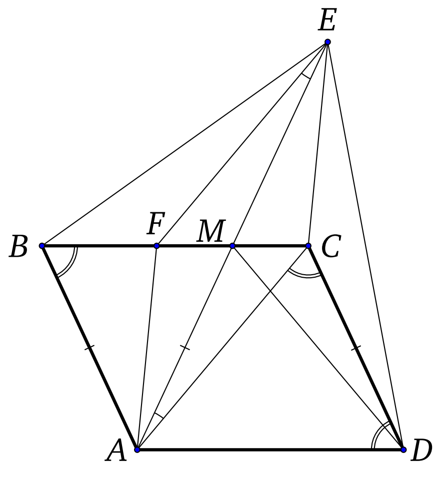
Якщо в множині 5 фішок, то вони можуть: а) йти послідовно, тоді таких множин 10; б) 4 фішки разом і 1 окремо, тоді починатися четвірка може з будь-якого із 10 місць; а окрема фішка стоїть на будь-якому із 4 не сусідніх місць. Отримуємо 40 множин; в) 3 фішки разом і 2 фішки разом або окремо, тоді починатися трійка може з будь-якого із 10 місць, а 2 фішки, що залишились, стоять на двох із 5 не сусідніх місцях $C_5^2 = 10$ способами. Таких множин 100. Таким чином, всього з 5 фішками є 150 множин.

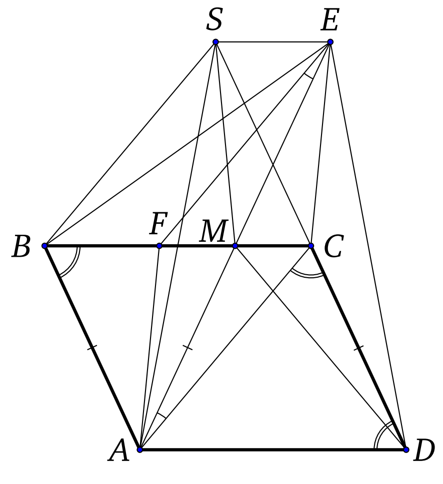
Якщо в множині 6 фішок, то вони можуть: а) йти послідовно, тоді таких множин 10; б) 5 фішок разом і 1 окремо, тоді для п'ятірки 10 варіантів початку, для окремої фішки — один із 3 варіантів; всього 30 множин; в) 4 фішки разом і 2 фішки разом або окремо, тоді починатися четвірка може з будь-якого із 10 місць, а 2 фішки, що залишилися, стоять на двох із 4 місць $C_4^2 = 6$ способами. Таких множин 60; г) 3 фішки разом і іще 3 фішки разом, перша трійка починається на одному із 10 місць, друга починається на одному із 3 місць, і трійки можна поміняти місцями. Отримуємо $30 : 2 = 15$ множин; д) 3 фішки разом і 3 не разом (2 і 1 або 3 окремих). Для трійки — 10 варіантів, для решти $C_5^3 - 3 = 7$ способів (із 5 місць вибираємо 3 для фішок і відкидаємо 3 варіанти, коли вони стоять разом). Отримуємо 70 множин. Таким чином, всього 185 множин з 6 фішками.

Всіх множин отримуємо $176 + 10 + 60 + 150 + 185 = 581$.

*Відповідь.* 581 підмножина.

**3.** Вершина $F$ паралелограма $ACEF$ лежить на стороні $BC$ паралелограма $ABCD$. Відомо, що $AC = AD$ та $AE = 2CD$. Доведіть, що $\angle CDE = \angle BEF$.




**Розв'язання.** Нехай $M$ — середина відрізку $CF$. Оскільки чотирикутник $ACEF$ — паралелограм, точка $M$ є серединою відрізку $AE$. Позначимо $\angle MAC = \angle MEF = \alpha$ та $\angle ABC = \angle ADC = \angle ACD = \beta$. Так як $AM = AE/2 = CD$, $AMCD$ — рівнобічна трапеція. З цього отримуємо, що $\alpha = \angle MAC = \angle MDC$ та $MD = AC = AD$. Окрім того, оскільки $MA = CD = AB$ та $\angle ABM = \angle ADC = \beta$, рівнобедрені трикутники $ABM$ та $ACD$ подібні, тоді $\frac{AB}{BM} = \frac{AC}{CD}$. Трикутники $BME$ та $EMD$ теж подібні за двома пропорційними сторонами і кутом між ними, оскільки $\angle BME = 180° - \beta = 180° - \angle DMA = \angle EMD$ і

$$\frac{BM}{ME} = \frac{BM}{MA} = \frac{CD}{AD} = \frac{MA}{MD} = \frac{EM}{MD}.$$

Отже, $\angle BEM = \angle EDM$. З цього слідує, що $\angle BEF = \angle BEM - \alpha = \angle EDM - \alpha = \angle CDE$.

*Другий спосіб.* Як і в першому розв'язанні, позначимо точку $M$ та покажемо, що $AMCD$ — рівнобічна трапеція. Відкладемо на промені $DC$ відрізок $CS = DC = ME$. Оскільки $\angle SCB = \angle ABC = \beta = \angle EMC$, то перпендикуляри, проведені на $BC$ із точок $E$ та $S$, рівні. З цього маємо, що $SE \parallel BC$. Саме тому чотирикутники $MSEC$ та $ASED$ — теж рівнобічні трапеції. Зокрема, $ASED$ вписана в деяке коло. З іншого боку, оскільки відрізки $AB$ та $CS$ паралельні та рівні, то $ACSB$ — паралелограм. З цього маємо, що $BS = AC = AD$. Отже, $DABS$ — теж рівнобічна трапеція. Оскільки точки $A$, $S$ та $D$ лежать на колі, то точка $B$ теж належить цьому колу. Із вписаного чотирикутника $BSED$ отримуємо: $\angle SBE = \angle SDE = \angle CDE$. Залишилось зазначити, що $BSEF$ — паралелограм (оскільки $BS$ паралельна та дорівнює $FE$), звідки $\angle BEF = \angle SBE = \angle CDE$.

**4.** Знайдіть всі функції $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, які задовольняють рівність

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2) \cdot f(n+3) - 2016$$

при всіх $n \in \mathbb{N}$.

**Розв'язання.** Підставимо в дану рівність замість $n$ значення $n+1$ і віднімемо ці дві рівності. Отримаємо:

$$f(n) - f(n+2) = f(n+3) \cdot (f(n+2) - f(n+4)). \qquad (\star)$$

Якщо $f(1) > f(3)$, то за індукцією, $f(2m-1) > f(2m+1)$ для всіх $m > 0$, що дає нескінченну спадну послідовність $f(1), f(3), \ldots$ натуральних чисел, що неможливо. Тому, $f(1) \leqslant f(3)$. Аналогічно, $f(n) \leqslant f(n+2)$ для всіх натуральних $n$.

Тепер зазначимо, що

$$\begin{aligned} 0 &= 2016 + f(n) + f(n+1) - f(n+2) \cdot f(n+3) \leqslant \\ &\leqslant 2016 + f(n+2) + f(n+3) - f(n+2) \cdot f(n+3) = \\ &= 2017 - (f(n+2) - 1)(f(n+3) - 1). \end{aligned}$$

Це означає, що для кожного $n$ справджується хоча б одне з співвідношень $f(n+2) = 1$, $f(n+3) = 1$, $f(n+3) \leqslant 2017$ або $f(n+2) \leqslant 2017$.

Із $(\star)$ слідує, що числа $f(2m+1) - f(2m-1)$ або всі дорівнюють нулеві, або всі додатні. Аналогічно для чисел $f(2m+2) - f(2m)$.

Якщо припустити, що додатними є всі різниці як з парними, так і з непарними значеннями аргументу, то, зрештою, починаючи з певного $n$, числа $f(n+2)$ та $f(n+3)$ перевищать 2017, що приводить до протиріччя.

Залишаються три випадки:

1) Якщо всі різниці виду $f(n+2) - f(n)$ дорівнюють нулю (тобто для кожного $m \in \mathbb{N}$ $f(2m) = a$, $f(2m-1) = b$), то рівність, яку задано в умові задачі, набуває виду:

$$(f(2m) - 1)(f(2m-1) - 1) = (a-1)(b-1) = 2017.$$

Тоді або $f(2m) = 2$ і $f(2m-1) = 2018$, або $f(2m) = 2018$ і $f(2m-1) = 2$ (адже 2017 — просте число).

2) Якщо $f$ стала для непарних значень аргументу ($f(2m-1) = c$ для всіх $m \in \mathbb{N}$), а $f(2m)$ набуває різних значень при різних значеннях $m$, то $f(2m-1) = 1$ для всіх $m$ і рівність з умови задачі набуває виду

$$f(2m+2) = f(2m) + 2017,$$

тобто $f(2m) = 2017(m-1) + A$, де $A = f(2)$ — натуральне.

3) Аналогічно, якщо $f(2m) = c$ для всіх $m \in \mathbb{N}$, а $f(2m-1)$ набуває різних значень при різних значеннях $m$, то $f(2m) = 1$ і рівність з умови задачі набуває виду

$$f(2m-1) = 2017(m-1) + A,$$

де $A = f(1)$ — натуральне.

*Відповідь.* 1) $f(n) = \begin{cases} 2, & \text{якщо } n \text{ — парне (непарне)}, \\ 2018, & \text{якщо } n \text{ — непарне (парне)}. \end{cases}$

2) $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n = 2m-1,\ m \in \mathbb{N}, \\ 2017(m-1) + A, & \text{якщо } n = 2m,\ m \in \mathbb{N};\ A \in \mathbb{N}. \end{cases}$

3) $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } n = 2m,\ m \in \mathbb{N}, \\ 2017(m-1) + A, & \text{якщо } n = 2m-1,\ m \in \mathbb{N};\ A \in \mathbb{N}. \end{cases}$

**5.** Нехай $m$ та $n$ — натуральні числа. Розглянемо всі підмножини множини $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, враховуючи порожню. Для кожної підмножини обчислимо суму її елементів і остачу від ділення цієї суми на $m$ (сумою елементів порожньої множини назвемо 0). Якщо виявиться, що кількість підмножин, для яких знайдена остача дорівнює $k$, однакова для всіх $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$, то пару $(m, n)$ назвемо *збалансованою*. Доведіть, що:

1) якщо пара $(m, n)$ збалансована, то $m = 2^l$, де $l$ — ціле невід'ємне число;

2) якщо $m = 2^l$, де $l$ — ціле невід'ємне число, то знайдеться натуральне число $n_0$, таке, що при всіх натуральних $n > n_0$ пари $(m, n)$ будуть збалансованими.

**Розв'язання.** 1) Розглянемо групу підмножин з сумами елементів, що дають остачу 0 при діленні на $m$, групу підмножин з сумами елементів, що дають остачу 1 при діленні на $m$, і т. д. Оскільки пара $(m, n)$ за умовою збалансована, то кількість підмножин в кожній групі однакова. Нехай кожна із розглядуваних $m$ груп містить по $x$ підмножин. Тоді загальна кількість розглядуваних підмножин дорівнює $m \cdot x$. Але кількість підмножин у множині $\{1, 2, 3, ..., n\}$ дорівнює $2^n$. Отже, $m \cdot x = 2^n$, з цього і отримуємо, що $m = 2^l$, де $l$ — ціле невід'ємне число.

2) Зазначимо, що при $l = 0$ всі числа дають остачу 0 при діленні на $m = 1$, тобто для будь-якого $n$ всі підмножини множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ попадуть в одну групу з $k = 0$. Нехай $l \geqslant 1$. Доведемо, що необхідна властивість виконується при всіх натуральних $n > \frac{m}{2} = 2^{l-1}$.

Для кожної підмножини в множині чисел $\{1, 2, ..., n\}$ будемо розглядати вираз, що дорівнює сумі елементів цієї підмножини. Додамо в цю суму два нульових доданки — значення суми не зміниться. Порожній множині відповідає сума нуль, записана як $0 + 0$. Перегрупуємо доданки для кожної суми, поділивши їх на дві частини: $A$ та $B$. В частину $A$ увійде 0 та всі степені двійки до $2^{l-1}$, які є в даній сумі. В частину $B$ увійде 0 та всі інші доданки, які були в даній сумі і не увійшли в $A$. Наприклад, при $m = 2^3$ суму $C = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 8 + 10$ ми розпишемо як $C = A + B$, де $A = 0 + 1 + 2 + 4$, а $B = 0 + 3 + 5 + 8 + 10$. Розглянемо всі суми з фіксованою частиною $B$ (з точністю до доданків, які потрапляють в $B$). Їхня кількість дорівнює $2^l$. Справді, в частині $A$ є доданки $2^0, 2^1, ..., 2^{l-1}$, перед кожним із яких стоїть коефіцієнт 1 або 0. Всього $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{l} = 2^l$ варіантів.

Покажемо, що при фіксованій частині $B$ суми з різною частиною $A$ дають різні остачі при діленні на $m = 2^l$. Дійсно, в частину $A$ можуть входити всі різні числа, менші, за

$2^l$ — фактично записані в двійковій системі числення. Тому вони дають всі можливі остачі (різні числа — різні остачі) при діленні на $m = 2^l$. Однак, ми розглядаємо суми з фіксованою частиною $B$. Тоді і наші суми виду $A+B$ дають всі можливі остачі від ділення на $m = 2^l$ (різні суми — різні остачі). Отже, при кожній фіксованій частині $B$ кожна остача зустрічається тільки в одній сумі елементів розглядуваних підмножин (при якомусь одному значенні частини $A$). Тоді кількість підмножин з сумами елементів, які дають остачу $k$ при діленні на $m = 2^l$, дорівнює кількості варіантів для частини $B$ (при розглядуваному $n$) і не залежить від $k$. Твердження доведено.