ФІЗИКА (ЮНІОРИ)

1. Розглянемо найбільш несприятливий варіант. Відразу після того, як людина обернулася (відстань L), з-за повороту виїхав автобус. Швидкість, з якою зменшується відстань між автобусом і людиною, $u - v$. Мінімальна відстань, коли слід озирнутися, l = 40 м. Отже, людина має озирнутися через час, не більший, ніж

$$\Delta t = \frac{L-l}{u-v}.$$

Ця формула справедлива для часу між будь-якими сусідніми поворотами. За умовою людина озирнулася, коли відстань до перехрестя була L_0 = 100 м. Тоді наступного (першого за додатковим підрахунком) разу вона повинна озирнутися не пізніше, ніж через

$$\Delta t_1 = \frac{L_0-l}{u-v}.$$

За час $\Delta t_1 = 5{,}4$ с вона віддалиться від перехрестя на додаткову відстань $v\Delta t_1$, так що тепер: $L_1 = L_0 + v\Delta t_1$. Отже

$$\Delta t_2 = \frac{L_1 - l}{u - v} = \frac{L_0 + v\Delta t_1 - l}{u - v} = \frac{L_0 - l}{u - v} + \frac{v\Delta t_1}{u - v} = \Delta t_1 + \frac{v\Delta t_1}{u - v} = \frac{u}{u - v}\Delta t_1$$

Тоді $\Delta t_3 = \frac{u}{u-v}\Delta t_2 = \left(\frac{u}{u-v}\right)^2 \Delta t_1$ і

$$\Delta t_n = \left(\frac{u}{u - v}\right)^{n-1} \Delta t_1$$

або

$$\Delta t_n = \left(\frac{u}{u - v}\right)^{n-1} \frac{L_0 - l}{u - v}$$

Позначимо $q = \frac{u}{u-v} = \frac{9}{8}$, тоді загальний час, який пройде від найпершого до n -го обертання

$$t_n = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \cdots + \Delta t_n = (1 + q + \cdots + q^{n-1})\Delta t_1$$

Маємо геометричну прогресію. Її суму можна підраховувати крок за кроком, поки час t_n не зрівняється з часом, необхідним на подолання відстані до зупинки, або скористатися формулою скороченого множення $1 - q^n = (1 - q)(1 + q + \cdots + q^{n-1})$, звідки й знаходиться сума геометричної прогресії

$$t_n = \frac{1-q^n}{1-q}\Delta t_1 = (q^n - 1)\frac{L_0-l}{v}.$$

Знову розглянемо несприятливий варіант, коли автобус повернув відразу після останнього n -го обертання, але людина все ж таки має встигнути на зупинку раніше за автобус. Оскільки автобус завжди зупиняється на цій зупинці, він має подолати всю відстань S. Можна спробувати врахувати зменшення його швидкості перед зупинкою, вважаючи, що для цього потрібні ті ж самі $l = 40$ м. Якщо швидкість рівномірно зменшується, то час на її подолання буде вдвічі більшим, ніж при рівномірному русі, тобто $2l/v$. Тоді час автобуса
$t_а = \frac{S-l}{u} + \frac{2l}{u} = \frac{S+l}{u}$.

На момент появи автобуса людина встигла додатково повернутися ще n раз і віддалитися від перехрестя на відстань

$$L_n = L_0 + vt_n = q^n(L_0 - l) + l$$

Отже, час людини до зупинки

$$t_л = \frac{S - L_n}{v}$$

Звичайно, навіть якщо людина запізниться на декілька секунд, вона підбіжить, і водій її зачекає. Але для розв'язання задачі вважаємо, що за умовою людина не змінює швидкість руху і встигає без напружень. Тоді

$$t_л \leq t_а$$

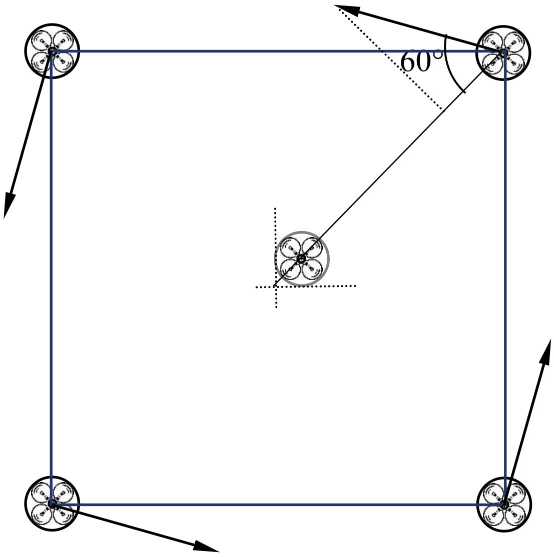
і

$$q^n \geq \frac{S - l - \frac{v}{u}(S + l)}{L_0 - l} = \frac{20}{9}$$

Найменше n, що задовольняє цій нерівності 7.

Можна розв’язати задачу покроково. Зауважимо, що відповідь 8 обертань, яку можна отримати суто формально, є невірною, оскільки швидкість автобуса перед зупинкою повинна зменшуватись.

Відповідь: людина має додатково обернутися від одного до семи разів, щоб по дорозі до зупинки не пропустити автобус.



2. Симетрія задачі зберігатиметься, отже у будь-який момент часу квадрокоптери знаходитимуться у вершинах квадрату, розмір якого зменшуватиметься. Це неважко помітити, оскільки вектори швидкостей утворюють кут α+45°=60° з відповідними напрямками на центр. Квадрат буде зменшуватись і повертатися. Швидкість наближення до центру завжди дорівнюватиме половині від швидкості квадрокоптеру (як катет навпроти кута 30°, або внаслідок множника cos60°=1/2 у проекції швидкості). Під час зіткнення відстань від центру квадрату до центру квадрокоптера становитиме $d\frac{\sqrt{2}}{2}$ (див.рис.). Квадракоптер у напрямку до центру пройде відстань $(a-d)\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 3{,}182$ м, причому за перші дві секунди 1м вздовж траєкторії або ½ м у напрямку до центру. Загальний час руху

$$t = 2\text{с} + \frac{(a-d)\frac{\sqrt{2}}{2} - 1/2\text{м}}{v\cos 60°} = 1\text{с} + \frac{(a-d)\sqrt{2}}{v} \approx 7{,}4 \text{ с}$$

Інший спосіб розв’язку пов'язаний зі швидкістю скорочення сторони квадрату.

3. Перш за все зазначимо, що за усталеного температурного режиму в приміщенні потужність теплових втрат дорівнює загальній потужності обігрівачів. Потужність теплового потоку через стіни, дах тощо можна вважати пропорційною різниці температур по різні боки: $P = k \cdot \Delta t$. Постійний коефіцієнт k, що визначає швидкість теплопередачі, залежить від площі поверхні, через яку відбувається теплопередача, товщини шару матеріалу та його теплопровідності. Чим більший цей коефіцієнт, тим гірша теплоізоляція приміщення. Зазначимо також, що треба враховувати й теплопередачу між кімнатами: адже з таблиці бачимо, що вмикання обігрівача у вітальні підвищує й температуру в спальні. Позначимо k коефіцієнт теплопередачі між кімнатами, $k_с$ — між спальнею та зовнішнім повітрям, $k_в$ — між вітальнею та зовнішнім повітрям. Позначимо також $P_с$, $P_в$ потужності постійно діючих систем опалювання відповідно в спальні та вітальні.

Скориставшись даними з таблиці, напишемо умови балансу енергії, що надходить та втрачається в кожній кімнаті (ми відразу підставляємо числові значення всіх температур, щоб не вводити великої кількості додаткових позначень):

$$\begin{cases} P_с + k \cdot 6\ °\text{C} = k_с \cdot 26\ °\text{C}, \\ P_в = k_в \cdot 32\ °\text{C} + k \cdot 6\ °\text{C}, \\ P_с + P_1 + k \cdot 3\ °\text{C} = k_с \cdot 30\ °\text{C}, \\ P_в = k_в \cdot 33\ °\text{C} + k \cdot 3\ °\text{C}, \\ P_с + P_1 + k \cdot 5\ °\text{C} = k_с \cdot 31\ °\text{C}, \\ P_в + P_2 = k_в \cdot 36\ °\text{C} + k \cdot 5\ °\text{C}. \end{cases}$$

Ця система з шести рівнянь дозволяє знайти три невідомі коефіцієнти теплопередачі та три невідомі потужності. З другого та четвертого рівнянь отримуємо $k_в = 3k$, з третього та п'ятого рівнянь знаходимо $k_с = 2k$. Підставивши ці значення, отримаємо:

$$P_в = k \cdot 102\ °С,\ P_с = k \cdot 46\ °С,\ P_1 = k \cdot 11\ °С,\ P_2 = k \cdot 11\ °С.$$

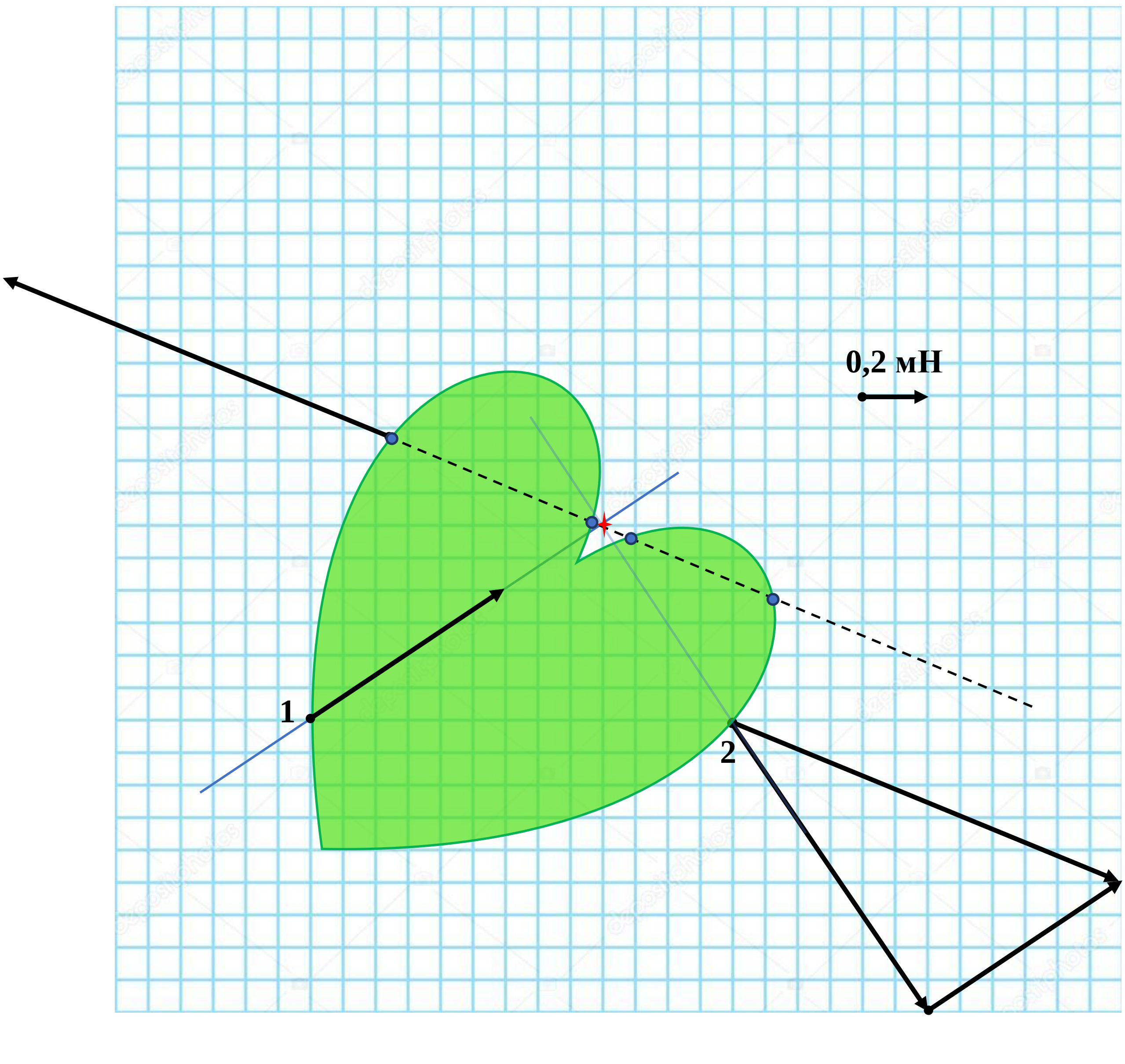
Отже, $P_2 = P_1 = 1$ кВт. а $\frac{P_в}{P_с} = \frac{102}{46} \approx 2{,}2$.

Проект містив суттєві помилки:

- Не передбачено можливість регулювання потужності опалювальної системи.
- Найкращу теплоізоляцію чомусь зроблено **між** кімнатами, тоді як доцільно було б забезпечити теплоізоляцію **зовнішніх** стін, даху тощо.

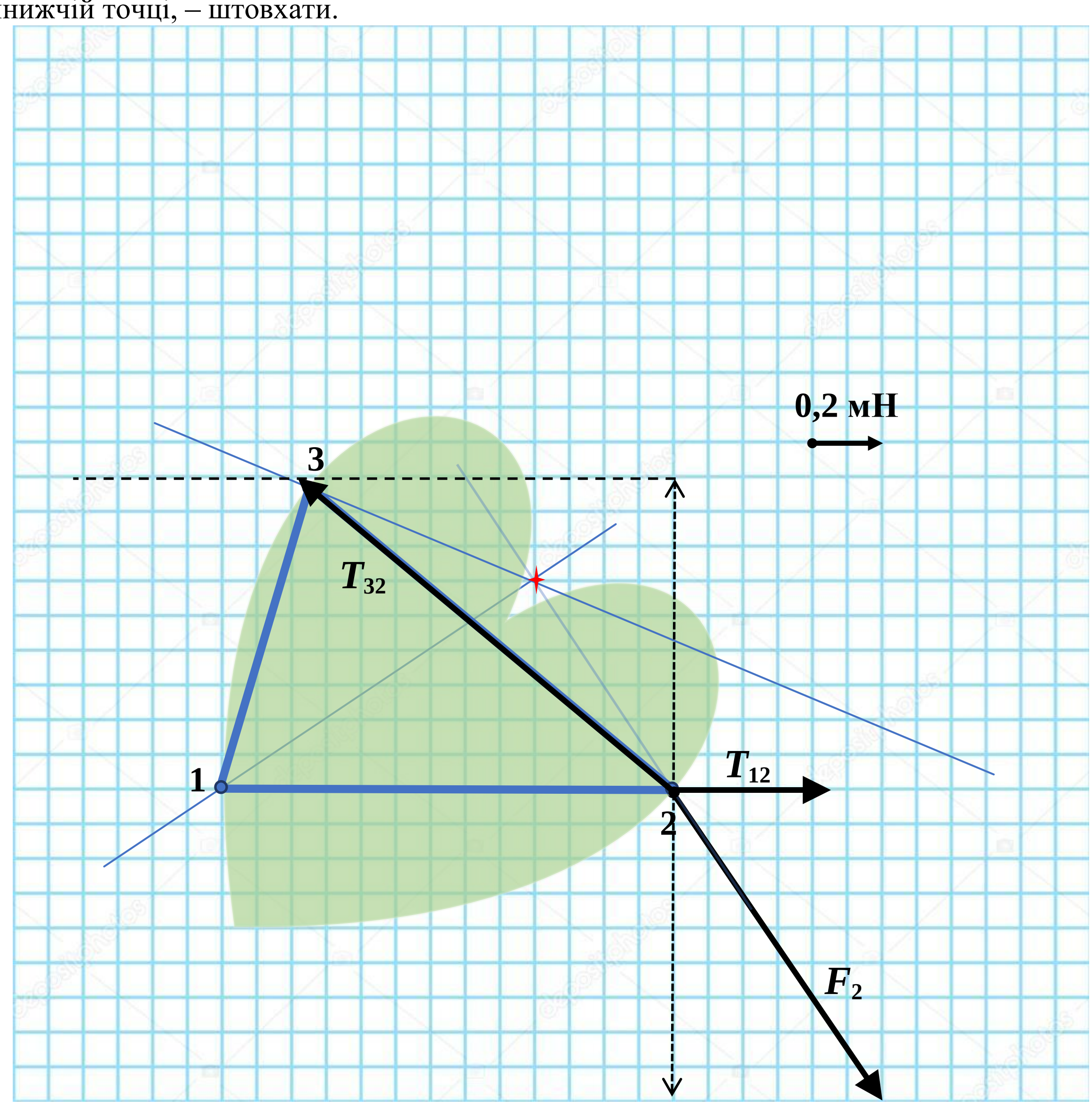
4. З умови статичної рівноваги векторна сума сил і сума моментів сил, що діють на листик дорівнюють нулю. Тому величину і напрям сили третього мурахи знаходимо як вектор, обернений до суми $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$ (див. рис). Це можна зробити навіть, рахуючи клітинки. Вправо перша і друга сили мають проекції по 6 клітинок (0,6 мН), отже третя сила матиме протилежну горизонтальну проекцію у 12 клітинок (1,2 мН). Вертикальні проекції $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$ відповідно 4 і –9 клітинок, отже $\overrightarrow{F_3}$ матиме вертикальну проекцію у 5 клітинок (0,5 мН). За теоремою Піфагора знаходимо, що модуль третьої сили 13 клітинок, або 1,3 мН, а спрямована вона вліво на 12 клітинок, а вгору – на 5.

Продовжимо лінії дії сил $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$ до перетину (точка позначено на рисунку зірочкою). Відносно цієї точки моменти сил $\overrightarrow{F_1}$ і $\overrightarrow{F_2}$ дорівнюватимуть нулю. Отже відносно неї і момент



сили $\overrightarrow{F_3}$ має дорівнювати нулю, тобто лінія дії $\overrightarrow{F_3}$ проходить через цю точку. Маємо чотири точки перетину цієї лінії з листиком.

Якщо мураха докладає силу у лівій верхній точці, як зображено на рисунку, то він має тягти листик, якщо у наступній точці – штовхати, далі – знову тягти, і нарешті у четвертій, найнижчій точці, – штовхати.



5. Опори тонкої та товстої дротин відрізняються в 4 рази, отже при паралельному ввімкненні струм через товсту дротину в 4 рази більше, ніж через тонку. Отже, першою перегоряє товста дротина при 5,2 А (на ній першій було досягнуто граничний струм), тоді на тонкій дротині струм 5,2/4 = 1,3 А. Але ,як тільки перегоряє товста дротина, весь струм в 5,2 А + 1,3 А = 6,5 А тепер пройде через тонкий дріт і він миттєво перегорить. Тоді запобіжник виконає свою функцію і повністю розімкне коло. Відповідь: 1) 6,5 А.

При ввімкненні іншого запобіжника співвідношення між струмами на тонкій ї товстій дротинах зберігається. Видно, що граничне значення струму 5,2 А знову першим досягається на товстій дротині, тому загальний струм у момент перегоряння товстої буде 5,2 А + 1,3·20 А, тобто 31,2 А.

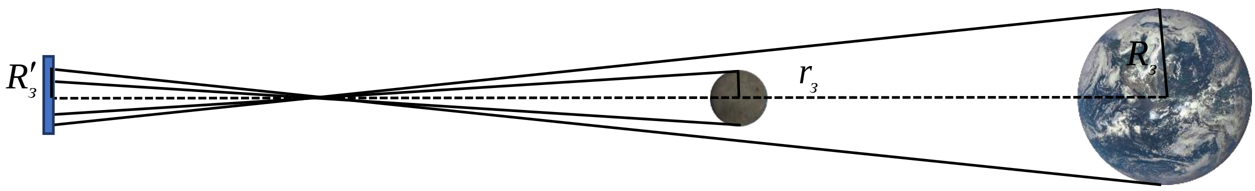
На кожній тонкій дротині буде струм 31,2/20 = 1,56 А. Тому, щоб запобіжник спрацював, потрібно струм через коло ще збільшити до 1,8 А·20 = 36 А.

Відповідь 2) 36 А.

ФІЗИКА (СТАРША ЛІГА)

1. Див. задачу 2 юніорської ліги.

2. На фото і Земля, і Місяць майже повністю освітлені. Отже, космічний апарат майже точно знаходиться на лінії Сонце–Місяць–Земля. Згідно фото, відношення радіусів небесних тіл приблизно дорівнює 2,73 (зазначимо, що за рахунок невеликої смужки тіні справа на дисках тіл, краще вимірювати відношення не горизонтальних, а вертикальних діаметрів). Згідно умови, відношення радіусів 3,66. Отримана невідповідність означає, що космічний апарат (КА) знаходиться на відстані, яка порівняна з відстанню між Землею і Місяцем, а остання суттєво перевищує розміри небесних тіл. Кут, під яким видно з КА Землю незначний. Якщо уявити лінзу, крізь оптичний центр якої проходять промені від країв тіл і падають на матрицю, формуючи зображення, то відношення радіусів небесних тіл на фото $R'_З/R'_М$ буде дорівнювати відношенню тангенсів кутів, під якими ці тіла спостерігаються (див. Рис.). Враховуючи малість кутів, маємо



$$\frac{R'_З}{R'_М} = \frac{R_З/r_З}{R_М/r_М},$$

звідки й знаходимо

$$\frac{r_М}{r_З} = \frac{R'_З}{R'_М}\frac{R_М}{R_З} \approx 0{,}746 \quad \text{або} \quad \frac{r_З}{r_М} \approx 1{,}34.$$

Знайдемо тепер відношення сил тяжіння:

$$\frac{F_З}{F_М} = \frac{GmM_З/r_З^2}{CmM_М/r_М^2} = \frac{M_З}{M_М}\left(\frac{r_М}{r_З}\right)^2 \approx 45.$$

Скориставшись значенням відстані між небесними тілами, визначимо також, на якій відстані від Землі знаходиться космічний апарат:

$$r_{ЗМ} = r_З - r_М \approx 0{,}254 r_З,\ r_З \approx 1{,}5 \text{ млн км}.$$

Ця відстань складає 1% відстані від Землі до Сонця. Отже, відстань від Сонця до КА складає 99% відстані від Сонця до Землі, і період КА мало відрізнятиметься від земного. Тоді, особливо якщо площина орбіти КА співпадає з площиною земної орбіти, КА досить довго проходитиме поряд із Землею, яка своєю гравітацією «віттягуватиме» його від Сонця, і може встигнути суттєво відхилити його орбіту від кола. Дійсно, період КА $T_{КА} = (0{,}99)^{\frac{3}{2}}T \approx 0{,}985T$, тобто, менший одного року лише на $0{,}015T_З \approx 5{,}5$ діб і становить приблизно 360 діб. При цьому ми не враховували гравітаційний вплив Землі. Якщо його врахувати, тоді другий закон Ньютона для супутника набуде вигляду:

$$m\omega_{КА}^2 r_{КА} = \frac{GmM_С}{r_{КА}^2} - \frac{GmM_З}{(r_З)^2}$$

або

$$\omega_{КА}^2 0{,}99r = \frac{GM_С}{(0{,}99r)^2} - \frac{GM_З}{(0{,}01r)^2}.$$

З другого закону Ньютона для Землі $M_З\omega^2 r = \frac{GM_З M_С}{r^2}$ виразимо масу Сонця і підставимо у рівняння для кутової швидкості КА:

$$\omega_{КА} = \omega\sqrt{\frac{1}{(0{,}99)^3} - \frac{10^6}{0{,}99}\frac{GM_З}{\omega^2 r^3}} \approx 1{,}0003\omega.$$

У межах похибки кутові швидкості співпали. Для періодів обертання $T_{КА} \approx 0{,}9997T$, тобто різниця за рік не перевищує 3 години, що, враховуючи невелику точність наших вимірювань лінійкою, є вражаючим. Отже, ми встановили, що формально можливі дві відповіді. Перша 360 діб, коли площина орбіти КА утворює достатній кут з площиною орбіти Землі, щоб впливом Землі при прольоті КА можна було знехтувати, а його орбіту вважати колом. Друга відповідь 365 діб і 6 годин, як у Землі. КА обертається синхронно з Землею, що можливо внаслідок гравітаційної дії Землі, яка зменшує рівнодійну сил гравітації, спрямовану в бік Сонця.
У задачі було наведено фото, зроблене у 2015 р. космічним американським апаратом DSCOVR (Deep Space Climate Observatory), що знаходиться у лагранжевій точці L1 на відстані 1,5 млн км від Землі в напрямку Сонця.

3. Запишемо II закон Ньютона в імпульсній формі в проекції на вертикальну вісь під час удару:

$$\frac{m\Delta v_y}{\Delta t} = F_{тр}$$

Запишемо основне рівняння динаміки обертального руху для кільця:

$$mR^2\frac{\Delta\omega}{\Delta t} = -F_{тр}R$$

Враховуючи що $\Delta\omega = \omega' - \omega$, а $\Delta v_y = v_y$, запишемо:

$$\frac{mv_y}{\Delta t} = mR\frac{\omega - \omega'}{\Delta t}$$

Максимальна висота підйому:

$$H = \frac{v_y^2}{2g}$$

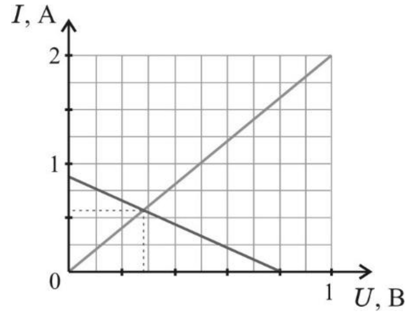
Тоді $\sqrt{2gH} = R(\omega - \omega')$, звідки ω’, яка залишається сталою під час всього руху по параболі, дорівнює:

$$\omega' = \omega - \frac{\sqrt{2gH}}{R}$$

Кільце набуває максимальної потенціальної енергії та досягає максимальної висоти за умови припинення проковзування по вертикальній стінці під час удару. Цю умову можна записати у вигляді: $\omega' R = v_y$. Таким чином, виконується умова $H \le \frac{\omega^2 R^2}{8g}$.

4. а) Навіть якщо залишити в колі тільки резистори 1 і 2, то напруга на резисторі 2 дорівнюватиме лише 0,8 В. Отже, в реальному колі ця напруга менша від 0,8 В і діод «закритий». Щоб скористатися всіма умовами, можна застосувати графічний метод розв’язання. Якщо позначити напругу на лампі U_L, то сили струму в ділянках кола $I_1 = \frac{U - U_L}{R_1}$, $I_2 = \frac{U_L}{R_2}$. Оскільки у верхній вузол кола втікає струм I_1, а витікають з нього струми I_2, I_L, отримуємо $I_1 = I_2 + I_L$, звідки після підстановок отримуємо $I_L = 10(0,8 - U_L)/9$.

Залишається знайти точку перетину графіку цієї залежності з наданою в умові ВАХ (фактично там теж залежність I_L від U_L). З рисунку (ми наводимо лише частину ВАХ) бачимо, що $I_L \approx 0{,}56$ А, $U_L \approx 0{,}28$ В. Отже, $P_L = U_L I_L \approx 0{,}16$ Вт.



Оскільки «працює» лінійна ділянка вольт-амперної характеристики, то можна й просто замінити лампу резистором з опором 0,5 Ом. Тоді простий розрахунок дає $U_L = \frac{U}{28} = \frac{2}{7}$ В, $I_L = \frac{4}{7}$ А, $P_L = \frac{8}{49}$ Вт $\approx 0{,}16$ Вт. Зазначимо, що лампа навряд чи світитиме, а тільки трохи нагріватиметься.

б) Тепер є підстави припустити, що діод «відкриється», що й підтверджується розрахунком. Це означає, що тепер $I_L = \frac{32{,}5-U_L}{9} - \frac{U_L}{1} - \frac{U_L-0{,}8}{2} = 4{,}01 - 1{,}61.$ Графічним методом (аналогічно пункту *а*) отримуємо: напруга на лампі близько 1,1 В, сила струму в лампі близько 2,2 А, потужність струму в лампі близько 2,4 Вт. Лампа, скоріше за все, ледь-ледь світитиме.