XXIV відкрита Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики «Турнір чемпіонів»

МАТЕМАТИКА
Старша ліга

1. Нехай $f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$. Доведіть, що $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$ для довільних цілих a та b.

2. Послідовність $a(n)$ задається рекурентним співвідношенням $a(n+2)=a(n)+a(n+1)$ з початковими значеннями $a(0)=20$, $a(1)=17$, а послідовність $b(n)$ – рекурентним співвідношенням $b(n+2)=b(n)-b(n+1)$ з початковими значеннями $b(0)=20$, $b(1)=18$. Обчисліть

$$a(2017)b(2018)+a(2018)b(2017).$$

3. На квадратній дошці 8×8 позначили деякі клітинки так, що в кожної із 64 клітинок є не більше однієї позначеної сусідньої клітинки (клітинки вважаються *сусідніми*, якщо в них є спільна сторона). Яка найбільша кількість клітинок могла бути позначеною?

4. Нехай AD – бісектриса трикутника ABC. Коло ω проходить через вершину A і дотикається до сторони BC в точці D. Це коло перетинає вдруге сторони AC і AB в точках M і N відповідно. Прямі BM і CN перетинають вдруге коло ω в точках P і Q відповідно. Прямі AP і AQ перетинають сторону BC в точках K і L відповідно. Доведіть, що $KL=\frac{1}{2}BC$.

5. Дано непарне натуральне число $a>100$. На дошці записали всі натуральні числа виду $\frac{a-n^2}{4}$, де n — натуральне число. Виявилось, що при $n\le\sqrt{\frac{a}{5}}$ всі вони прості. Довести, що і кожне із решти виписаних на дошці натуральних чисел є простим, або ж дорівнює одиниці.

XXIV відкрита Всеукраїнська комплексна олімпіада з математики, фізики та інформатики «Турнір чемпіонів»

МАТЕМАТИКА. Розв'язання задач
Старша ліга

Задача 1. Нехай $f(x)=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{2\pi x}{3}\right)$. Доведіть, що $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$ для довільних цілих a та b.

Розв'язання. Оскільки функція $y=\sin x$ періодична з періодом 2π, то $f(x+3)=f(x)$ для довільного x. Тому $f(c)$ для цілих c однозначно визначається своїми значеннями на остачах від ділення c на 3: $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f(2)=-1.$

Якщо одне із чисел a або b дорівнює нулеві, то в лівій та правій частинах рівності, яку необхідно довести стоять однакові числа – нулі. В решті випадків маємо:

$$f(1\cdot 1)=f(1)=1=f(1)\cdot f(1),$$
$$f(1\cdot 2)=f(2)=-1=f(1)\cdot f(2),$$
$$f(2\cdot 2)=f(4)=f(1)=1=f(2)\cdot f(2).$$

Задача 2. Послідовність $a(n)$ задається рекурентним співвідношенням $a(n+2)=a(n)+a(n+1)$ з початковими значеннями $a(0)=20,\ a(1)=17$, а послідовність $b(n)$ – рекурентним співвідношенням $b(n+2)=b(n)-b(n+1)$ з початковими значеннями $b(0)=20,\ b(1)=18$. Обчисліть

$$a(2017)b(2018)+a(2018)b(2017).$$

Розв'язання. Позначимо $c(n)=a(n-1)b(n)+a(n)b(n-1)$. Нас цікавить значення $c(2018)$. Помічаємо, що для довільного натурального n:

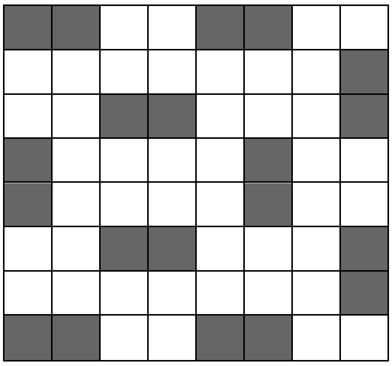
$$c(n+1)=a(n)b(n+1)+a(n+1)b(n)=$$
$$=a(n)\big(b(n-1)-b(n)\big)+\big(a(n-1)+a(n)\big)b(n)=$$
$$=a(n)b(n-1)+a(n-1)b(n)=c(n).$$

Це означає, що всі елементи послідовності $c(n)$ однакові. Тоді $c(2018)=c(1)=a(0)b(1)+a(1)b(0)=20\cdot 18+17\cdot 20=700.$

Відповідь. 700.

Задача 3. На квадратній дошці 8×8 позначили деякі клітинки так, що в кожної із 64 клітинок є не більше однієї позначеної сусідньої клітинки (клітинки вважаються *сусідніми*, якщо в них є спільна сторона). Яка найбільша кількість клітинок могла бути позначеною?

Розв’язання. 1) 20 клітинок позначити можна – див. рисунок:



2) Доведемо, що більше 20 клітинок позначити не можна.

I спосіб. Розфарбуємо дошку в шаховому порядку. Доведемо, що з врахуванням умови не можливо позначити більше 10 білих клітинок. Розглянемо чорну клітинку I. Тоді серед клітинок, сусідніх з нею (позначені 1) – не більше однієї позначеної за умовою. Розглянемо чорну клітинку II. Тоді серед сусідніх з нею клітинок (позначені 2) – не більше однієї позначеної. Аналогічно, вибираємо чорні клітинки I – X (і позначаємо деякі із сусідніх з ними клітинки відповідно 1, 2, 3, 4…). Отримуємо, що зон білих клітинок, в кожній із яких не більше однієї позначеної, всього 10. Ці зони вже містять разом всі білі клітинки. Отже, позначених білих клітинок не більше 10. Аналогічно доводиться, що і позначених чорних клітинок не більше 10. Це означає, всього позначено не більше 20 клітинок.

	1		2	II	2		3
1	I	1		2		3	III
	1		5		4		3
6		5	V	4	IV	4	
VI	6		5		4		9
6		8	VIII	8		9	IX
	7		8		10		9
7	VII	7		10	X	10	

II спосіб. Нехай x – кількість позначених кутових клітинок, y – кількість позначених клітинок вздовж сторін дошки (окрім кутових), z – кількість позначених клітинок, які не прилягають до країв дошки.

Кутових клітинок 4, тобто $x \le 4$. Розглянемо клітинки, сусідні з відміченими в кутках – їх по 2, з рештою вздовж сторін – по 3, і з позначеними в середині дошки – по 4. При цьому кожна клітинка є сусідньою не більше, ніж з однією позначеною, за умовою. Тому всього клітинок, сусідніх з позначеними, $2x+3y+4z \le 64$ (звідки $\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y+z \le 16$). Окрім того, $2x+2y \le 28$ (звідки $x+y \le 14$). Справді, розглянемо клітинки вздовж краю дошки, сусідні з позначеними клітинками вздовж краю дошки. Кожна клітинка є сусідньою не більше, ніж з однією із позначених біля краю дошки. Тому, загальна кількість клітинок, сусідніх з позначеними біля краю дошки, не перевищує загального числа клітинок біля краю, тобто 28. Оцінимо загальну кількість усіх позначених клітинок:

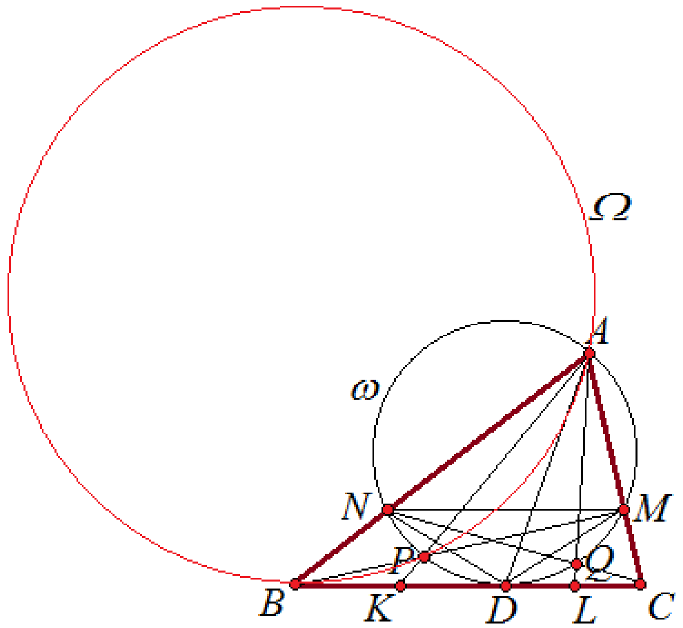
$$x+y+z=\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y+z\right)+\frac{1}{4}(x+y)+\frac{1}{4}x \le 16+\frac{14}{4}+1=20{,}5.$$

Отже, всього позначили не більше 20 клітинок.

Відповідь. 20.

Задача 4. Нехай AD – бісектриса трикутника ABC. Коло ω проходить через вершину A і дотикається до сторони BC в точці D. Це коло перетинає вдруге сторони AC і AB в точках M і N відповідно. Прямі BM і CN перетинають вдруге коло ω в точках P і Q відповідно. Прямі AP і AQ перетинають сторону BC в точках K і L відповідно. Доведіть, що $KL = \frac{1}{2}BC$.

Розв'язання. Зробимо рисунок до задачі.



Оскільки AD – бісектриса кута BAC, то $\angle BAD = \angle CAD = \frac{\alpha}{2}$. За властивістю вписаних кутів, одержуємо: $\angle NMD = \angle NAD = \frac{\alpha}{2}$. А за теоремою про кут між дотичною і хордою, що проведена в точку дотику, одержуємо: $\angle CDM = \angle DAM = \frac{\alpha}{2}$. Тому, $\angle NMD = \angle CDM$. Оскільки ці кути внутрішні різносторонні, то $NM \parallel CD$, тобто $MN \parallel CB$.

Далі, використовуючи описані вище властивості кутів, одержуємо: $\angle BAK = \angle NAP = \angle NMP = \angle KBP$, тобто $\angle BAK = \angle KBP$. Це означає, що описане коло Ω трикутника APB дотикається до сторони BC у точці B. Таким чином, за теоремою про дотичну і січну, знаходимо:

$$KB^2 = KA \cdot KP = KD^2.$$

Звідси слідує, що $KB = KD$, тобто K – середина BD. Аналогічно доводиться, що L – середина DC. Тому, $KL = KD + DL = \frac{1}{2}BD + \frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}BC$, що і треба було довести.

Задача 5. Дано непарне натуральне число a, яке більше 100. На дошці записали всі натуральні числа виду $\frac{a-n^2}{4}$, де n — натуральне число. Виявилось, що при $n \le \sqrt{\frac{a}{5}}$ всі вони прості. Довести, що і кожне із решти виписаних на дошці натуральних чисел є простим або ж дорівнює одиниці.

Розв'язання. Якщо a при діленні на 4 дає остачу 3, то на дошці взагалі немає цілих чисел, тому що квадрати при діленні на 4 дають остачі тільки 0 або1. В цьому випадку твердження задачі, очевидно, правильне. Далі вважаємо, що a при діленні на 4 дає остачу 1. Тоді $a = 4p+1$, де $p = \frac{a-1}{4}$, отже, p — просте. Помічаємо, що число $\frac{a-n^2}{4}$ буде цілим тоді і тільки тоді, коли n непарне.

Оскільки при непарному n різниця $p - \frac{a-n^2}{4} = \frac{n^2-1}{4}$ парна, то всі цілі числа виду $\frac{a-n^2}{4}$ тут непарні.

Нехай для деякого a умова задачі виконується, а висновок — ні. Розглянемо таке найменше n, що число $b = \frac{a-n^2}{4}$ — складене. Позначимо через u його найменший простий дільник. Оскільки $n > \sqrt{\frac{a}{5}}$, то виконується нерівність $b = \frac{a-n^2}{4} < \frac{a}{5}$. Отже, $u < b < \sqrt{\frac{a}{5}} < n$, тобто $u < n$, звідки $-n<n-2u<n$. Тому $\left(n-2u\right)^2 < n^2$, причому $n-2u$ не дорівнює 0, оскільки n непарне. Легко побачити, що число $\frac{a-(n-2u)^2}{4}$ натуральне, ділиться на u та більше b, тобто воно не просте і не одиниця, Отже, число $\left|n-2u\right|$, менше n, також породжує складене натуральне число, що суперечить мінімальності n.

Зауваження. Умова задачі виконується, наприклад, для a = 173.