Старша ліга

1. Форма траєкторії залежить від напряму початкової швидкості. Врахуємо, що ця швидкість дорівнює половині орбітальної швидкості для колової орбіти радіуса R. Отже, модуль початкової швидкості $v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{GM}{R}}$. Тому механічна енергія корабля

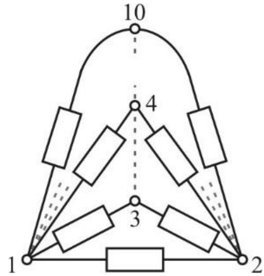
$$W = W_k + W_p = -G\frac{Mm}{R} + \frac{mv^2}{2} = -G\frac{7Mm}{8R}.$$

Велика піввісь орбіти a залежить тільки від механічної енергії корабля: $W = -G\frac{Mm}{2a}$, звідки $a = \frac{4R}{7}$. Далі все просто: якщо позначити відстань від точки A до шуканого фокуса r, то $r + R = 2a$, звідки $r = R/7 \approx 21$ млн км (адже «дальній» фокус еліпса розташований у центрі Сонця). Таким чином, «ближній» фокус розташований на сфері радіусом 21 млн км із центром у точці A. Якщо початкова швидкість напрямлена радіально, то еліпс вироджується у відрізок прямої (корабель впаде на Сонце). Формально це відповідає відстані між фокусами $r + R$). Якщо початкова швидкість напрямлена перпендикулярно до напряму на Сонце, відстань між фокусами буде $R - r$ (зміна напряму швидкості на протилежний не впливає на форму траєкторії).

2. Припустимо, що учень з'єднав усі пари клем одну з одною (приєднав усі $10 \cdot 9/2 = 45$ резисторів). Визначимо опір такого кола між двома клемами 1 і 2 (зрозуміло, що не має значення, між якими саме). Тоді всі резистори можна розділити на групи:

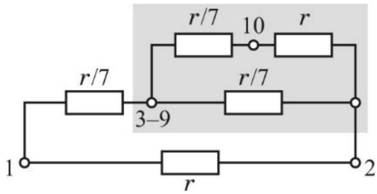
- Перша група — один резистор з'єднує клеми 1 і 2.
- Друга група — 16 резисторів з'єднують клеми 1 і 2 з рештою клем.
- Третя група — 28 резисторів ($8 \cdot 7/2 = 28$) з'єднують решту 8 клем одну з одною.

На рисунку показано лише перший резистор і частину резисторів другої групи. Резистори ж третьої групи з'єднують клеми 3, 4, …, 8 — середини ділянок з двох резисторів, приєднаних між клемами 1 і 2. Отже, напруга між цими клемами дорівнює нулю (їх потенціали однакові). Тому по резисторах третьої групи струм не тече. Еквівалентна схема у цьому випадку містить 9 паралельних ділянок: одну опором r і 8 — опором $2r$. Отже, загальний опір кола $R_0 = r/5 = 9$ Ом.



Подивимося тепер, як змінюється опір через відсутність ***одного*** з резисторів.

- Якщо це резистор третьої групи, то опір взагалі не зміниться.
- Якщо відсутній резистор між клемами 1 і 2, то опір кола становить $r/4 = 11{,}25$ Ом.
- Розглянемо окремо випадок, коли відсутній резистор другої групи. Оскільки всі ці резистори відіграють однакову роль у колі, видалимо резистор між клемами 1 і 10. Сила струму в резисторах, що з'єднують одну з одною клеми 3 — 9, залишається рівною нулю. А от у резисторах третьої групи, що з'єднують клему 10 з клемами 3 — 9, з'явиться струм. Відповідно зміниться еквівалентна схема кола. Сім клем (від третьої по дев'яту) можна подумки об'єднати та розглядати як один вузол кола (3–9). Між цим вузлом і клемою 1 — сім паралельно з'єднаних однакових резисторів, які можна замінити одним з опором $r/7$. Аналогічна ситуація з опором між вузлом 3–9 і клемою 2, а також з опором між вузлом 3–9 і клемою 10 (див. рисунок).



Опір ділянки кола, яку виділено на рисунку сірим кольором, дорівнює $8r/63$. Опір цієї ділянки з послідовно приєднаним резистором $r/7$ дорівнює $17r/63$. Отже, загальний опір кола в цьому випадку становить $17r/80$, тобто приблизно 9,56 Ом.

Отримані результати роблять непотрібним подальший аналіз різних випадків, пов'язаних з відсутністю й ***другого*** резистора. Адже зрозуміло, що додаткове видалення будь-якого резистора може або не змінити опір кола, або збільшити його, тобто змінити ще більше. Тож доходимо висновку: щасливими для учня будуть ***ті й тільки ті*** випадки, коли всі резистори першої та другої груп є на місці. Кількість цих резисторів — 17 із 45. Якщо ми випадковим чином видалятимемо перший резистор, то ймовірність того, що ми «зачепимо» саме резистор третьої групи, становить 28/45. Якщо так само видалятимемо ще один резистор, відповідна ймовірність буде вже 27/44. Отже, ймовірність того, що майстер не помітить помилки учня, становить $\frac{28}{45} \cdot \frac{27}{44} \approx 0,38$ (тобто 38 %).

3. Кульки можуть рухатись до зіткнення, як в одній площині, так і в різних, але, якщо вертикальні складові їх початкових швидкостей будуть різними, то кульки весь час руху перебуватимуть на різній висоті, і зіткнення не відбудеться. Отже необхідною умовою, яку можна записати, використовуючи тільки α_1, α_2, v_{01}, v_{02} є рівність їх вертикальних швидкостей.

$$v_{01} \sin\alpha_1 = v_{02} \sin\alpha_2 .$$

Це наочно зрозуміло з точки зору неінерціальної системи відліку, яка разом з кульками починає рухатись з прискоренням вільного падіння. Відносно неї кульки рівномірно переміщуються вздовж прямих. Точка перетину прямих буде на певній відстані від горизонтальної площини початку руху. Цю відстань (у перпендикулярному до площині напряму) за однаковий час мають пройти обидві кульки, що потребує однакового значення їх вертикальних швидкостей.

Припустимо, що у момент зіткнення швидкості кульок $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$. Запишемо закон збереження імпульсу і зміну кінетичної енергії, яка йде на нагрів кульок.

$$\begin{cases} m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}, \\ (c_1 m_1 + c_2 m_2)\Delta t = \dfrac{m_1\vec{v}_1^{\,2}}{2} + \dfrac{m_2\vec{v}_2^{\,2}}{2} - \dfrac{(m_1 + m_2)\vec{v}^{\,2}}{2}. \end{cases}$$

З першого рівняння виражаємо $\vec{v}$, підставляємо у друге і після спрощення отримуємо $(c_1 m_1 + c_2 m_2)\Delta t = \dfrac{m_1 m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(m_1 + m_2)}$, звідки

$$\Delta t = \frac{x(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(x+1)(c_1 x + c_2)}, \tag{1}$$

де для зручності введено позначення $m_1/m_2 = x$. Аналіз формули (1) на максимум можна провести без використання похідних, наприклад так:

$$\Delta t = \frac{x(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(x+1)(c_1 x + c_2)} = \frac{x(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2(c_1 x^2 + (c_1 + c_2)x + c_2)} = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 / 2}{c_1 x + (c_1 + c_2) + c_2/x} =$$

$$= \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2 / 2}{\left(\sqrt{c_1 x} - \sqrt{c_2/x}\right)^2 + \left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2}.$$

Найбільше значення Δt буде за найменшого знаменника, тобто, коли повний квадрат $\left(\sqrt{c_1 x} - \sqrt{c_2/x}\right)^2$ дорівнюватиме нулю. Звідси знаходимо відношення маси свинцевої кульки m_1 до маси пластилінової m_2, при якому збільшення температури найбільше:

$$x = m_1/m_2 = \sqrt{c_2/c_1}\ .$$

Як бачимо, шукане відношення мас не залежить від швидкостей тіл перед зіткненням. Одночасно з цим отримуємо і найбільше Δt:

$$\Delta t = \frac{(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2}{2\left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2}.$$

Зазначимо, що максимальне значення Δt вже залежить від швидкостей перед зіткненням, точніше кажучи, від відносної швидкості тіл $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$, яка, враховуючи вираз $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t$ для рівноприскореного руху, дорівнює початковій відносній швидкості:

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{01} + \vec{g}t - (\vec{v}_{02} + \vec{g}t) = \vec{v}_{01} - \vec{v}_{02}.$$

Оскільки вертикальні складові початкових швидкостей однакові, то відносна початкова швидкість буде горизонтальною і матиме максимальне абсолютне значення, коли тіла рухатимуться в одній площині назустріч одне одному. Тобто,

$$\Delta t_{\max} = \frac{\left(v_{01}\cos\alpha_1 + v_{02}\cos\alpha_2\right)^2}{2\left(\sqrt{c_1} + \sqrt{c_2}\right)^2}.$$

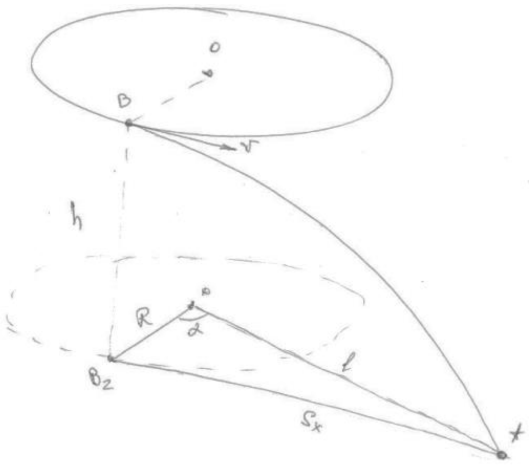
4. Між диском і кулькою відсутнє тертя, тому механічна енергія і момент імпульсу системи зберігається увесь рас руху кульки по диску.

Закон збереження механічної енергії: $\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$

Де v_0- початкова швидкість кульки; v – швидкість кульки у момент відриву від диску; ω – кутова швидкість диску, після відриву від нього кульки; m – маса кульки; $I = \frac{MR^2}{2} = 0{,}25\ \text{кг}\cdot\text{м}^2$ – момент інерції диску.

Закон збереження моменту імпульсу: $0 = mRv - I\omega$

Знайдемо швидкість кульки у момент відриву від диску і кутову швидкість диску вирішивши систему рівнянь: $v = v_0 \cdot \sqrt{\frac{I}{I+mR^2}} = 2{,}12\frac{\text{м}}{\text{с}}$ та $\omega = \frac{mvR}{I} = 4{,}24\ \text{с}^{-1}$.



Кулька відривається від диска по дотичній і тому її швидкість відносно землі буде дорівнювати швидкості відриву кульки від диску v.

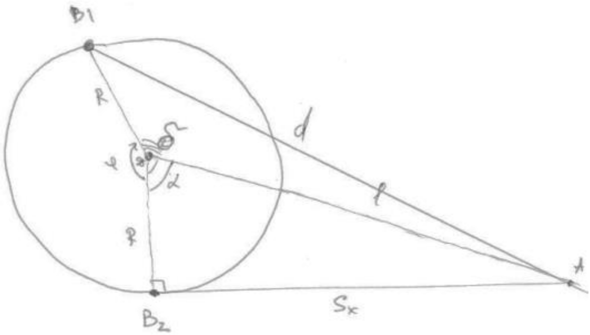
Час падіння можна знайти за формулою $\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0{,}452c$.

Горизонтальна складова переміщення кульки під час падіння дорівнює: $s_x = v \cdot \Delta t$. Тоді з теореми Піфагора для ΔDB_2A знайдемо горизонтальну складову відстані від центру диску до точки падіння: $l = \sqrt{R^2 + s_x^2} = 1{,}08\text{м}$.

1) З ΔODA знайдемо відстань від центра диску до точки падіння:

$$x = \sqrt{l^2 + h^2} = \sqrt{R^2 + (v\cdot\Delta t)^2 + h^2} = 1{,}47\text{м}$$

2) За час падіння точка відриву кульки провернулася разом з диском на кут $\varphi = \omega \cdot \Delta t = 1{,}92\text{рад} \approx 110°$.



З ΔDB_2A можна знайти кут $\alpha = arctg\left(\frac{v\cdot\Delta t}{R}\right) = 1{,}09\text{рад} = 62{,}4°$.
За допомогою теореми косинусів для трикутника ΔB_2B_1A з кутом $\delta = 2\pi - \varphi - \alpha = 360° - 110° - 62{,}4° = 187{,}6°$, знаходимо горизонтальну складову відстані між точкою відриву кульки та її положенням у момент падіння $d = \sqrt{l^2 + R^2 - 2lRcos\delta} = 1{,}58\text{м}$

Юніорська ліга

1. На шафу діють сила тяжіння mg, сили реакції опори під дальніми і ближніми ніжками N_1 і N_2, сила хлопчика *F*, а також сили тертя, які утримують шафу від проковзування під дією *F* вліво і спрямовані вправо (див. рис. 1). Розглянемо моменти цих сил відносно осі, що проходить через ближні ніжки (тим самим, моменти сил тертя і реакції N_2 ми зробимо нульовими):

$$N_1 a = mg\frac{a}{2} + Fh\,.$$

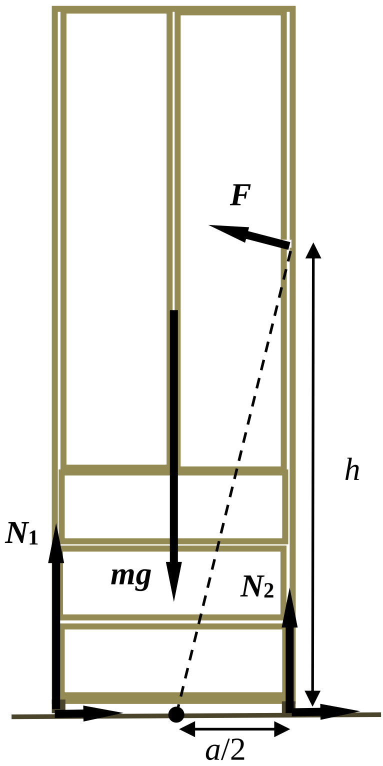
Отже, $N_1 = \frac{1}{2}mg + F\frac{h}{a}$.

Тоді $N_2 = mg - N_1 = \frac{1}{2}mg - F\frac{h}{a}$ і

$$N_1 - N_2 = 2F\frac{h}{a}\,. \qquad (1)$$

Відповімо на друге питання: «Під яким кутом α до горизонту слід спрямувати силу *F*, щоб різниця сил тиску стала найбільшою».

Попереднього разу ми вибрали вісь обертання так, щоб позбавитись не потрібних у нашому розгляді сил тертя. Спочатку знайшли N_1, потім N_2, а вже далі їх різницю. А чому б не вибрати вісь обертання так, щоб і позбутися сил тертя, і відразу отримати різницю сил N_1 і N_2? Для цього плечі сил N_1 і N_2 мають бути однаковими, а обертати вони повинні у різні сторони. Тому обираємо вісь обертання посередині між ніжками і заодно позбуваємось моменту сили тяжіння mg (див. рис. 3). Тепер правило умова рівноваги відразу дає відповідь як на перше, так і на друге питання.



$$\left(N_1 - N_2\right)\frac{a}{2} = Fd\ ,$$

$$N_1 - N_2 = 2F\frac{d}{a}\ . \qquad (2)$$

Якщо сила F спрямована горизонтально, її плече $d = h$, і формула (2) переходить в (1). У загальному випадку, згідно формули (2), для того, щоб $N_1 - N_2$ було максимальним, необхідно, щоб максимальним було плече d. Найбільше значення $\sqrt{(a/2)^2 + h^2}$ плече набуває за умови перпендикулярності сили F до напрямку на вісь обертання, яка розташована між лініями дотику до підлоги дальніх і ближніх ніжок шафи. На рис.3 це плече зображено пунктиром. Отже, максимальне значення $N_1 - N_2$ має вигляд:

$$N_1 - N_2\big|_{\max} = 2F\frac{\sqrt{(a/2)^2 + h^2}}{a} = F\sqrt{1 + (2h/a)^2}\ .$$

Взагалі ця відповідь справедлива, коли ближні ніжки шафи не відриваються від підлоги (а також шафа не ковзає). Якщо уявити, що ніжки повільно відриваються, то $N_1 - N_2\big|_{\max} = N_1 = mg$.

2. Видалимо подумки всі «вертикальні» реостати. У всіх горизонтальних ділянках кола напруга ділиться в однаковому відношенні 1 : 2 : 4. Отже, всі «вертикальні» реостати з’єднують точки з рівними по-

тенціалами. Тому струм по них не тече. Отримуємо три паралельні ділянки з опорами 7, 14 і 28 Ом. Загальний опір цієї частини кола дорівнює $r = 4$ Ом. Отже, сила струму в реостаті опором R становить $I = \frac{U}{R+r}$, а потужність струму в реостаті $P = I^2R = \frac{U^2R}{(R+r)^2}$. Знайти максимальне значення цього виразу можна різними способами. Застосуємо елементарну математику: $P = \frac{U^2}{(\sqrt{R}+\frac{r}{\sqrt{R}})^2}$. Найбільше значення виразу відповідає найменшому значенню знаменника. Сума в дужках найменша, коли обидва доданки рівні, тобто за умови $R = r$. Отримуємо $P = \frac{U^2}{4r} =$ 9 Вт.

3. Введемо наступні позначення:

t_1 = 80 °C

t_2 = 90 °C

h_1 – рівень води при температурі t_1

h_2 – рівень води при температурі t_2

$t_л$ = 0 °C – початкова температура льоду

θ – кінцева температура суміші (після танення льоду)

Z=10^{-6}

1. Зміна рівня води при нагріванні.

Залежність об'єму рідини від температури визначається так:

$V_1 = V_0(1 + \beta t_1)$ та відповідно $V_2 = V_0(1 + \beta t_2)$, де V_0 – об'єм рідини при температурі 0 °C.

Якщо тепловим розширенням посудини знехтувати, об'єм рідини можна розрахувати як Sh, де S – незмінна величина.

Таким чином,

$Sh_1 = Sh_0(1 + \beta t_1)$;

$Sh_2 = Sh_0(1 + \beta t_2)$.

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{1 + \beta t_1}{1 + \beta t_2}$$

За допомогою очевидних математичних перетворень визначаємо Δh

$$\Delta h = h_1 \frac{\beta(t_2 - t_1)}{1 + \beta t_1}$$

$$\Delta h = 9{,}6 \text{ мм}$$

2. Визначення кількість шматочків льоду

Визначимо температуру суміші θ, що утворилася при додаванні шматочків льоду у воду.

З рівняння теплового балансу (враховуючи масу льоду $m_л = Zm_в N$) маємо наступне:

$\lambda Z m_в N + cZm_в N(\theta - t_л) + cm_в(\theta - t_2) = 0$, де

с – питома теплоємність води.

$\theta = \frac{c(ZNt_л + t_2) - \lambda ZN}{c(ZN+1)}$ (1)

При таненні льоду утворюється вода при температурі 0 °C об'ємом $V_{0л} = \frac{Zm_в N}{\rho_0}$.

ρ_0 – густина води при температурі 0 °C.

При підвищенні температури до θ об'єм відповідно збільшується $V_{л2} = V_{0л}(1 + \beta\theta)$

Загальний об'єм рідини у посудині при температурі θ дорівнює

$$V_к = V_{0л}(1 + \beta\theta) + V_0(1 + \beta\theta) = V_1$$

Визначимо об'єми через геометричні розміри:

$$Sh_1 = \frac{ZNm_в}{\rho_0}(1 + \beta\theta) + Sh_0(1 + \beta\theta) = V_1$$

Із врахуванням того, що $V_1 = V_0(1 + \beta t_1)$

$$V_0(1 + \beta t_1) = ZNV_0(1 + \beta\theta) + V_0(1 + \beta\theta)$$

$$1 + \beta t_1 = ZN(1 + \beta\theta) + 1 + \beta\theta$$

Перетворимо останній вираз:

$$1 + \beta t_1 = (1 + \beta\theta)(ZN + 1)$$

У поєднанні з рівнянням (1) отримуємо:

$$1 + \beta t_1 = \left(1 + \beta\frac{c(ZNt_л + t_2) - \lambda ZN}{c(ZN + 1)}\right)(ZN + 1)$$

Розкриваючи дужки, отримаємо

$$N = \frac{\beta(t_1 - t_2)}{Z + \beta Z\left(t_л - \frac{\lambda}{c}\right)}$$

Аналіз останнього виразу дає можливість визначити, що він від'ємний. Це означає, що при наведених умовах додавання кожного шматочку льоду призводить до збільшення об'єму рідини.

Дійсно. Якщо розглянути додавання тільки одного шматочка льоду, можна визначити зміну об'єму вмісту посудини (тепловою зміною об'єму рідини з одного шматочка льоду нехтуємо)

$$\Delta V = V_{\text{додаткове кубіка}} - V_{\text{зміна об єму внаслідок охолодження}} = \frac{m}{\rho_в} - \beta\Delta t V_0$$

$$\Delta V = \frac{m}{\rho_в} - \beta\frac{\lambda m}{\rho_в c_в V_0}V_0 > 0$$

Таким чином, додавання кожного шматочка льоду призводить тільки до збільшення об'єму вмісту посудини.

4. При спливанні на кульку діють такі сили – сила Архімеда F_a, сила тяжіння mg та сила опору рідини $F_{оп}$. Запишемо зв'язок між кінетичною енергію та роботою зовнішніх сил для цього руху:

$$\frac{mv^2}{2} = (F_a - mg)h - A_{оп} \qquad (1)$$

Роботу сили опору визначимо за допомогою графіка. Для повного спливання на 20 см обрахуємо площу фігури на графіку. Для цього треба збільшити щільність сітки. Далі порахуємо кількість цілих клітинок, які вписані в фігуру, що обмежується графіком та віссю абсцис, та кількість цілих клітинок, в які ця фігура вписана. Середнє арифметичне цих значень дасть приблизне значення площі фігури, фізичний зміст якої і є чисельним значенням роботи . Для значення h=0.2м робота сили опору приблизно дорівнює $A_{оп}$=0,027 Дж. Тоді швидкість при спливанні може бути визначена з рівняння (1) та приблизно дорівнює V=0,79 м/с. Для визначення залежності сили опору від швидкості розрахуємо швидкості для різних значеннях сили опору, використовуючи метод розрахунку, що приведений вище. Отримаємо що для різних точок графіку

$$\frac{F_{оп}}{v} = k \,,$$

де *k* виявляється сталим числовим коефіцієнтом, який лежить в межах 0,20-0,21 Н·с/м.