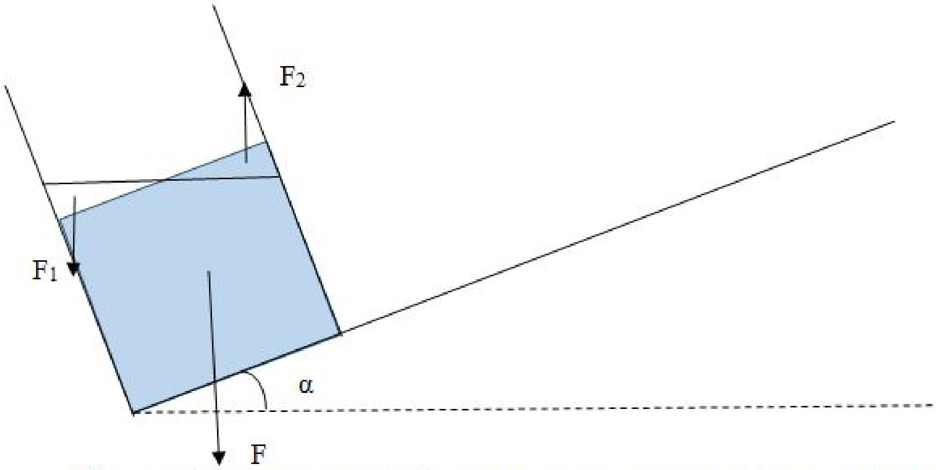
1. Розгляньмо посудину, яка знаходиться у нижньому положенні:



Рівень рідини в посудині залишиться горизонтальним, тому рідина у вигляді збоку матиме вигляд прямокутної трапеції. У порівнянні з попереднім положенням частина води, переріз якої має вигляд трикутника переміститься у такий самий трикутник, симетрично відносно точки перетину нового та старого рівнів. В результаті утворюється момент пари сил F_1 та F_2, сумарний момент яких не залежить від осі обертання. Обчислимо цей момент відносно точки перетину старого та нового рівнів рідини. Сили F_1 та F_2 прикладені до точок перетину медіан трикутників. Плечі цих сил можемо знайти з відповідних геометричних міркувань:

$$d(F_1) = d(F_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}cos\alpha - \frac{a}{4cos\alpha}\right) + \frac{a}{4}cos\alpha = \frac{a}{12}\left(5cos\alpha - \frac{1}{cos\alpha}\right)$$

Якщо позначити масу рідини в кожній посудині m, то в об'ємі води, якому відповідає кожний трикутний переріз знаходиться маса води: $\frac{mtg\alpha}{4}$

Момент пари цих сил дорівнюватиме:

$$M_н = \frac{mgatg\alpha}{24}\left(5cos\alpha - \frac{1}{cos\alpha}\right)$$

Момент сили F для цієї посудини дорівнюватиме:

$$M'_н = mg\left(l_0 + \frac{a}{2}tg\alpha\right)cos\alpha = mg\left(l_0cos\alpha + \frac{a}{2}sin\alpha\right)$$

Аналогічні вирази для моментів сил для верхньої посудини матимуть вигляд:

$$M_в = \frac{mgatg\alpha}{24}\left(5cos\alpha - \frac{1}{cos\alpha}\right)$$

$$M'_в = mg\left(l_0 - \frac{a}{2}tg\alpha\right)cos\alpha = mg\left(l_0 cos\alpha - \frac{a}{2}sin\alpha\right)$$

Тоді сумарний момент сили тяжіння, що діє на важіль:

$$M_{mg} = M_н + M_в + M'_н - M'_в = \frac{mgatg\alpha}{12}\left(5cos\alpha - \frac{1}{cos\alpha}\right) + mgasin\alpha$$

Для виведення важеля з цього положення в верхню посудину необхідно опустити вантаж, який при зануренні змінює рівень води в посудині. З боку води на вантаж діє сила Архімеда, тому і на рідину буде діяти така ж за модулем сила прикладена у точці, що є центром мас витісненої тілом води. Тому занурене тіло можна замінити водою такого ж об'єму. Маса цього об'єму води має створювати момент сили тяжіння M_x, який має бути більшим або рівним величині M_{mg}. Далі розглядатимемо крайній випадок:

$$M_{mg} = M_x$$

Момент M_x розраховується аналогічно до моменту $M'_в$. Позначимо об'єм води, що доливають xa^2. Тоді:

$$M_x = \frac{mgx}{a}\left(l_0 cos\alpha - \left(\frac{x}{2} + a\right)sin\alpha\right)$$

Остаточно маємо квадратне рівняння відносно x:

$$\frac{x}{a}\left(l_0 cos\alpha - \left(\frac{x}{2} + a\right)sin\alpha\right) = \frac{atg\alpha}{12}\left(5cos\alpha - \frac{1}{cos\alpha}\right) + asin\alpha$$

Розв'язок цього рівняння в загальному вигляді є громіздким, тому підставляючи чисельні значення та враховуючи що:

$$sin\alpha = \frac{h}{l_0 + \frac{a}{2}} = \frac{1}{3}$$

Отримаємо числову відповідь: $x \approx 0{,}5$ см

Тоді шуканий об'єм дорівнює 8 см^3.

2. Якщо б світло не розсіювалося та не поглиналося, то після збільшення відстані до джерела вдвічі освітленість зменшилася б до 25 лк. Отже, шар туману завтовшки 2 м спричиняє зменшення освітленості: $E_1 = kE_0$, де $k = \frac{24}{25} = 0,96$. На великій відстані зі збільшенням відстані на 2 м зменшенням освітленості за рахунок розширення хвильового фронту (обернено пропорційним квадрату відстані) можна знехтувати. Отже, $E_4 = kE_3 = 12$ млк.

Задача 3 (8 клас)

1) Знайдемо час зустрічі хлопчиків.

Графік швидкості, зображений ліворуч відповідає руху першого хлопчика, а графік, зображений праворуч - руху другого хлопчика. Оскільки перші *2 хв* після старту швидкість першого хлопчика більша ніж другого, то протягом перших двох хвилин руху другий хлопчик не наздожене першого. Вважаючи, що координата старту відповідає *0*, знайдемо координати хлопчиків x_1 та x_2 через перші *2 хв* руху (t_1*=2 хв=120 с*). З графіків слідує, що швидкості хлопчиків протягом цього часу υ_1*=5 м/с* та υ_2*=3 м/с*.

$$x_1(t) = \upsilon_1 t_1; \quad x_1 = 5 \cdot 120 = 600 \,(м)$$
$$x_2(t) = \upsilon_2 t_1; \quad x_2 = 3 \cdot 120 = 360 \,(м)$$

Отже, через перші *2 хв* руху перший хлопчик буде попереду другого.

Через дві хвилини швидкості бігунів зміняться. Запишемо рівняння руху $x_1^1(t)$ та $x_2^1(t)$ для наступних t_2*=3 хв=180 с* руху та знайдемо координати хлопчиків через цей час - x_1^1 та x_2^1. З графіків слідує, що швидкості хлопчиків протягом цього часу υ_1^1*=2 м/с* та υ_2^1*=5 м/с*.

$$x_1^1(t) = x_1 + \upsilon_1^1 t_2; \quad x_1^1 = 600 + 2 \cdot 180 = 960 \,(м)$$
$$x_2^1(t) = x_2 + \upsilon_2^1 t_2; \quad x_2^1 = 360 + 5 \cdot 180 = 1260 \,(м)$$

Отже, через наступні *3 хв* руху другий хлопчик пережене першого, тому зустріч відбудеться саме в цей проміжок часу. У момент, коли другий хлопчик наздожене першого, їх координати будуть однакові. Щоб знайти час зустрічі t_3 прирівняємо рівняння руху бігунів для цієї ділянки $x_1^1(t)$ та $x_2^1(t)$, підставивши замість часу t_3:

$$x_1 + \upsilon_1^1 t_3 = x_2 + \upsilon_2^1 t_3 \text{ звідки } t_3 = \frac{x_1 - x_2}{\upsilon_2^1 - \upsilon_1^1}; \; t_3 = 80 \text{ с}$$

Отже, хлопчики зустрінуться через *80 с* після першого свистка тренера (через *200 с* після старту).

2) Знайдемо середні швидкості хлопчиків за перші сім хвилин руху.

Щоб знайти середню швидкість кожного хлопчика необхідно увесь шлях, який подолав кожен з них за *7 хв* поділити на цей час. Шлях простіше всього знайти, скориставшись властивістю графіка швидкості: шлях чисельно рівний площі фігури, яка обмежена графіком, віссю *Ot* та перпендикулярами опущеними на цю вісь. Звідки шлях, який здолає перший хлопчик $S_1 = 5 \cdot 120 + 2 \cdot 180 + 3 \cdot 120 = 1320 \,(м)$, а другий: $S_2 = 3 \cdot 120 + 5 \cdot 180 + 2 \cdot 120 = 1500 \,(м)$. Середні швидкості хлопчиків за *t=7 хв=420 с*:

$$\upsilon_{CP1} = \frac{S_1}{t}; \; \upsilon_{CP1} \approx 3{,}14 \; (м/с)$$
$$\upsilon_{CP2} = \frac{S_2}{t}; \; \upsilon_{CP2} \approx 3{,}57 \; (м/с)$$

3) Визначимо переможця у змаганні з бігу

Визначити переможця однозначно неможливо, оскільки невідомо на якій відстані від старту знаходиться фініш. З попередніх розрахунків слідує, що через *5 хв* від старту попереду буде другий хлопчик, але його швидкість $\upsilon_2^2 = 2$ *м/с* менша ніж у першого $\upsilon_1^2 = 3$ *м/с*, тому якщо фініш буде достатньо далеко, перший хлопчик пережне другого. Знайдемо час T і координату X другої зустрічі. Для цього запишемо рівняння руху хлопчиків $x_1^2(t)$ та $x_2^2(t)$ через *5 хв* після старту:

$$x_1^2(t) = x_1^1 + \upsilon_1^2 t_3;$$
$$x_2^2(t) = x_2^1 + \upsilon_2^2 t_3;$$

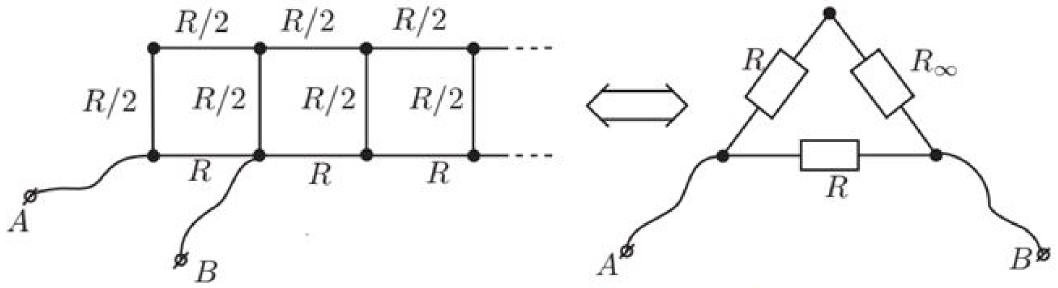
Щоб знайти час зустрічі T_3 прирівняємо рівняння руху бігунів для цієї ділянки $x_1^2(t)$ та $x_2^2(t)$, підставивши замість часу T_3:

$x_1^1 + \upsilon_1^2 T_3 = x_2^1 + \upsilon_2^2 T_3$ звідки $T_3 = \dfrac{x_2^1 - x_1^1}{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}$; $T_3 = 300$ *с* після другого свистка тренера.

Тоді координата другої зустрічі $X = x_1^1 + \upsilon_1^2 T_3$; $X = 1860$ *м*. Отже, відповідь на запитання «хто з хлопчиків переможе?» слід дати так:

- Якщо фініш знаходиться на відстані меншій ніж *1860 м* від старту, то у змаганні переможе другий хлопчик, який пережене першого на двохсотій секунді руху, від моменту старту;
- Якщо фініш знаходиться на відстані рівній *1860 м* від старту, то хлопчики фінішують одночасно;
- Якщо фініш знаходиться на відстані більшій за *1860 м* від старту, то у змаганні переможе перший хлопчик, який пережене другого у момент часу *300 с* після другого свистка тренера (*600 с* від моменту старту);

3. (9 клас) Із симетрії схеми, зображеної на малюнкові 1, відносно лінії, що з'єднує точки A і B, слідує, що потенціали усіх точок симетричних відносно цієї лінії рівні, тобто схеми на малюнках 1 і 2 еквівалентні. Розраховувати опір схеми на малюнкові уже легко:



$$R_\infty = \frac{\frac{R}{2}\left(R_\infty + \frac{3R}{2}\right)}{R_\infty + \frac{3R}{2} + \frac{R}{2}},$$

звідки $R_\infty = \frac{(\sqrt{21}-3)R}{4}$. Таким чином,

$$R_{AB} = \frac{(R_\infty + R)R}{R_\infty + 2R} = \frac{\sqrt{21}+1}{\sqrt{21}+5} R \approx 0{,}58R$$

4. Якби замість конуса в об'ємі, який він займає, знаходилась та ж сама рідина, то вона була би в положенні рівноваги. Це значить, що на конус діє сила Архімеда, направлена вверх і рівна по величині силі тяжіння, яка діє на рідину однакового з конусом об'єму:

$$F_a = \frac{\rho g S h}{3} = \frac{\rho g \pi D^2}{12} h.$$

Ця сила складається із двох сил: сили $\vec{f}$, з якою рідина діє на основу конуса, і тієї сили $\vec{F}$, яку потрібно по умові задачі знайти. Сила, що діє на основу конуса, направлена вздовж його осі та дорівнює за величиною добутку площі основи на середній тиск.

В силу симетрії форми основи конуса і однорідності поля тяжкості цей середній тиск рівний $\rho g H$. Звідки $f = \rho g H \pi D^2/4$.

Згідно рисунку, горизонтальна складова сили рівна силі f, а вертикальна складова – силі Архімеда, відповідно, шукана сила

$$F = \sqrt{F_a^2 + f^2} = \frac{\rho g \pi D^2}{4} \sqrt{H^2 + \frac{h^2}{9}}.$$