

XXII ВІДКРИТА ВСЕУКРАЇНСЬКА КОМПЛЕКСНА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ,
ФІЗИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ «ТУРНІР ЧЕМПІОНІВ»
Юніорська ліга

МАТЕМАТИКА. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ

1. Довести, що для довільного дійсного x виконується рівність

$$[x] + \left[x + \frac{1}{3} \right] + \left[x + \frac{2}{3} \right] = [3x]$$

(тут $[x]$ — це найбільше ціле число, яке не перевищує x .)

Розв'язання. Нехай $x = a + \alpha$, де a — ціле, а $\alpha \in [0, 1)$ — дробова частина числа x . Позначимо через $S(x)$ і $T(x)$ відповідно ліву і праву частини рівності, що доводиться. Розглянемо три випадки.

1. $\alpha \in [0, \frac{1}{3})$. Тоді

$$S(x) = a + a + a = 3a;$$

$$T(x) = [3(a + \alpha)] = [3a + 3\alpha] = 3a + [3\alpha] = 3a.$$

2. $\alpha \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$. Тоді

$$S(x) = a + a + (a + 1) = 3a + 1;$$

$$T(x) = [3(a + \alpha)] = [3a + 3\alpha] = 3a + [3\alpha] = 3a + 1.$$

3. $\alpha \in [\frac{2}{3}; 1)$. Тоді

$$S(x) = a + (a + 1) + (a + 1) = 3a + 2;$$

$$T(x) = [3(a + \alpha)] = [3a + 3\alpha] = 3a + [3\alpha] = 3a + 2.$$

Як бачимо, в кожному з цих випадків $S(x) = T(x)$, що і треба було довести.

2. На площині дано чотири точки: $A(0; 0)$, $B(2015; 2015)$, $C(0; 2015)$, $D(-2015; 0)$. Знайти усі такі пари цілих чисел $(b; c)$, для яких графік квадратного тричлена $y = x^2 + bx + c$ перетинає кожен із прямих AB , BC , CD та DA , причому усі точки перетину мають цілі координати.

Відповідь. таких пар чисел не існує.

Розв'язання. Абсциси точок перетину параболи з вказаними прямими є коренями таких квадратних рівнянь: $x^2 + bx + c = 0$ (з прямою AD), $x^2 + bx + (c - 2015) = 0$ (з прямою BC), $x^2 + (b - 1)x + c = 0$ (з прямою AB), $x^2 + (b - 1)x + (c - 2015) = 0$ (з прямою CD). Помітимо, що із отриманих чотирьох рівнянь хоча б одне має обидва непарних коефіцієнти.

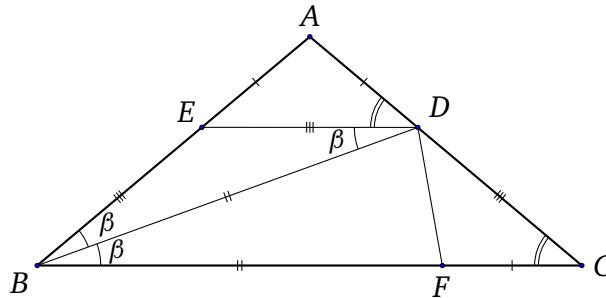
Доведемо, що квадратне рівняння $x^2 + bx + c = 0$ не має цілих коренів, якщо коефіцієнти b та c — непарні. Справді, нехай x_1 та x_2 — цілі корені вказаного рівняння. Тоді за теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -b$, $x_1 x_2 = c$. Якщо припустити, що c — непарне, то тоді непарними повинні були б бути і числа x_1 , x_2 . Проте тоді їхня сума є парною, що суперечить припущенню про непарність b .

Отже, хоча б одне з чотирьох вказаних рівнянь має не цілі корені, а значить чисел b, c , які б задовольняли умову задачі, не існує.

3. В рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = AC$) проведено бісектрису BD (точка D належить AC). Відомо, що $BC = BD + AD$. Знайти градусну міру кута BAC .

Відповідь. 100° .

Розв'язання. Нехай $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABD = \angle DBC = \beta$, $\angle ABC = \angle ACB = 2\beta$.



Проведемо DE паралельно BC (точка E належить AB). Тоді $AE = AD$, $BE = CD$, $\angle AED = \angle ADE = 2\beta$. Відмітимо точку F на BC так, щоб $BF = BD$, тоді $FC = AD$.

Оскільки $\angle EDB = \angle DBC = \beta$, то трикутник BDE — рівнобедрений, $DE = BE = CD$. Розглянемо трикутники AED і CFD . Вони рівні за двома рівними сторонами і куту між ними, оскільки $DE = CD$, $AD = FC$, $\angle ADE = \angle ACB = \angle DCF = 2\beta$. Тоді $\angle DFC = \angle BAC = \alpha$, $\angle DFB = 180^\circ - \alpha$. Отримуємо два рівняння для кутів трикутника CFD і трикутника DFB :

$$\begin{cases} \alpha + 4\beta = 180^\circ, \\ \beta + 360^\circ - 2\alpha = 180^\circ. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знаходимо: $\beta = 20^\circ$, $\alpha = 100^\circ$.

4. Дільник натурального числа назвемо **власним**, якщо він відмінний від 1 і самого цього числа. Натуральне число назвемо **гарним**, якщо найбільший власний дільник цього числа дорівнює сумі власного дільника, другого за величиною і власного дільника, третього за величиною. Наприклад, число 18 є гарним, оскільки 9 (його найбільший власний дільник) дорівнює сумі чисел 6 (другий власний дільник за величиною) і 3 (третій власний дільник за величиною). Скільки існує гарних чисел, які не перевищують 1 500 000?

Відповідь. 99 999.

Розв'язання. Нехай N — гарне число. Передусім зауважимо, що N парне. Справді, у непарного числа всі дільники непарні, а сума двох непарних чисел не може дорівнювати непарному числу. Тому найменший власний дільник числа N дорівнює 2, а найбільший, відповідно, $\frac{N}{2}$.

Якщо, що власні дільники числа пронумеровано за зростанням, позначимо через a і b відповідно другий і третій власні дільники числа N (перший власний дільник дорівнює 2). Тоді повинна виконуватись рівність

$$\frac{N}{2} = \frac{N}{a} + \frac{N}{b}.$$

Якщо $a \geq 4$, то

$$\frac{N}{a} + \frac{N}{b} \leq \frac{N}{4} + \frac{N}{5} < \frac{N}{2}.$$

Отже, $a = 3$. Тоді $\frac{1}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, тобто $b = 6$.

Це означає, що число N ділиться на 6, але не ділиться на 4 та 5. Остання умова означає, що число N при діленні на 60 дає одну із остач: 6, 18, 42, 54. Таким чином, серед кожних 60-ти послідовних чисел чотири гарних, за винятком числа 6, яке не є гарним. Тому маємо $4 \cdot \frac{1500000}{60} - 1 = 99999$ гарних чисел, які не перевищують півтора мільйони.

5. Усі натуральні числа пофарбовано у два кольори: чорний і білий. Відомо, що для довільних двох чисел різного кольору їхня сума є чорним числом, а добуток — білим.

а) Якого кольору може бути добуток двох білих чисел?

б) Знайти усі розфарбування чисел, які задовольняють умову задачі.

Розв'язання. а) Припустимо, що числа m і n білого кольору. Доведемо, що число mn також білого кольору. Розглянемо деяке число k чорного кольору. Тоді число $m + k$ також чорне, а число $(m + k)n = mn + kn$ — біле. Якщо припустити, що mn чорного кольору, то сума $mn + kn$ повинна була б бути чорною, як сума різнокольорових чисел (kn — біле як добуток чисел різного кольору). Одержана суперечність і доводить, що добуток mn не може бути чорним, а отже він є білим.

б) Таким чином, з умови задачі і доведеного в п. а) випливає, що якщо хоча б один з множників добутку двох чисел є білим, то і весь добуток є білим числом.

Нехай a — *найменше* біле число. Тоді за доведеним вище числа виду $k \cdot a$ ($k \in \mathbb{N}$) також є білими. Доведемо, що інших білих чисел немає. Розглянемо довільне число n , яке не ділиться на a . Подамо його у вигляді $n = p \cdot a + r$, де $0 < r < a$. Оскільки $r < a$, то r — чорне, а $p \cdot a$ — біле. Тоді n є чорним числом (як сума двох чисел різного кольору).

Легко перевіряється, що розфарбування чисел, які діляться на a (a — довільне фіксоване натуральне число, більше 1), в білий колір, а чисел, які не діляться на a — в чорний, задовольняє умову задачі.