

Задача 1. ЕКСЦЕНТРИЧНЕ ТІЛО

РОЗВ'ЯЗАННЯ

Умова задачі:

Визначити момент інерції наданого тіла відносно осі, яка проходиться через його центр мас та паралельна до твірної пробірки.

Розв'язання задачі:

Ідея експерименту:

Розв'язання задачі ґрунтується на дослідженні рівноприскореного руху зв'язаних тіл.

Теоретичне обґрунтування:

Розв'язання задачі доцільно розділити на три етапи: перший - визначення маси скріпки; другий - визначення параметрів наданого тіла: зовнішнього радіусу пробірки та маси пробірки з пластиліном; третій - визначення моменту інерції тіла відносно осі, яка проходить через його центр мас та паралельна до твірної пробірки.

I. Визначення маси скріпки.

Масу скріпки можна знайти, скориставшись формулою $m_1 = \rho V$, де m_1 - маса однієї скріпки, ρ - густина нікеліну (8900 кг/м^3), V - об'єм скріпки. Скріпка виготовлена з дротину, яку можна вважати однорідним циліндром, тому, щоб знайти об'єм дротину, достатньо знати її довжину L та діаметр d . Спочатку потрібно розпрямити скріпку, утворивши пряму дротину, та за допомогою лінійки виміряти її довжину L . Щоб знайти діаметр дротину d , потрібно намотати на неї нитку (10 - 20 витків), розмішуючи витки якнайщільніше один до одного, порахувавши при цьому їх кількість N та виміряти, потім, довжину намотаної нитки l . Тоді діаметр дротину:

$$d = \frac{l}{\pi N}$$

Отже, масу скріпки можна розрахувати за формулою: $m_1 = \rho L s = \rho L \pi \left(\frac{l}{\pi N}\right)^2 = \frac{\rho L}{\pi} \left(\frac{l}{N}\right)^2$

$$m_1 = \frac{\rho L}{\pi} \left(\frac{l}{N}\right)^2$$

II. Вимірювання параметрів наданого тіла

Щоб знайти зовнішній радіус пробірки, потрібно, як і у випадку зі скріпкою, намотати на неї нитку (10 - 20 витків), розмішуючи витки якнайщільніше один до одного, порахувавши при цьому їх кількість N_1 та виміряти, потім, довжину намотаної нитки l_1 . Тоді радіус пробірки:

$$R = \frac{l_1}{2\pi N_1}$$

Щоб виміряти масу наданого тіла m , необхідно виготовити із однієї з лінійок рівноплечий важіль та зрівноважити на ньому тіло за допомогою скріпок. Вимірявши плечі сил, які діють на важіль та знаючи масу однієї скріпки неважко буде обчислити m .

III. Вимірювання моменту інерції тіла відносно осі, яка проходить через його центр мас паралельно до твірної пробірки.

Спочатку слід зібрати установку із лінійок та книжки, зображену на фото (рис. 1), розташувавши її на краю столу. При цьому, використовуючи книжку, слід домогтися горизонтальності лінійок. На пробірку намотати нитку, до вільного кінця якої підвісити скріпку. Якщо дану систему тіл відпустити, вона буде здійснювати прискорений рух. Якщо вважати нитку невагомою та нерозтяжною, оскільки її маса значно менша за масу тіла та скріпки, то даний рух можна вважати рівноприскореним.

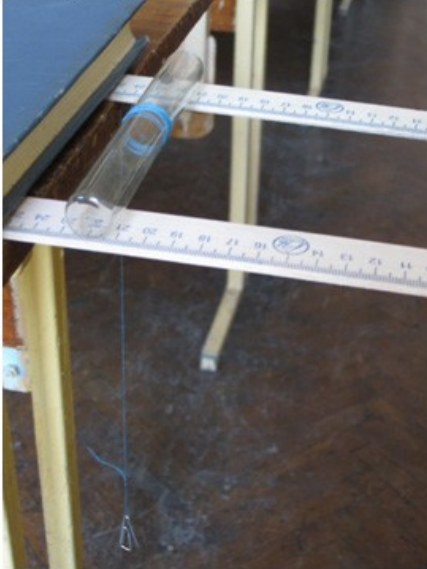


рис. 1

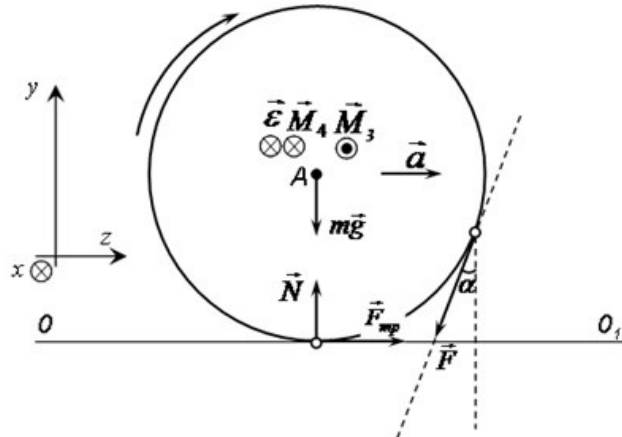


рис. 2

Розставимо сили, які діють на пробірку з пластиліном (рис. 2), де m - маса тіла, N - сила нормальної реакції лінійок, F_{mp} - сила тертя, F - сила натягу нитки, до якої підвішена скріпка, a - прискорення центра мас тіла, R - зовнішній радіус пробірки. Запишемо для тіла основне рівняння динаміки обертального руху в системі відліку «Земля» відносно осі, як проходить через точку A та твірну пробірки:

$$\begin{aligned} \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_4 &= J\vec{\varepsilon} \\ A: M_1(mg) &= 0 & M_2(N) &= 0 \\ M_3(F_{mp}) &= F_{mp}R & M_4(F) &= FR \end{aligned}$$

Перепишемо дане рівняння в проекції на вісь Ox :

$$Ox: FR - F_{mp}R = J\varepsilon$$

де J - шуканий момент інерції тіла, ε - кутове прискорення тіла. З останнього рівняння виразимо силу тертя:

$$F_{mp} = F - \frac{J\varepsilon}{R}$$

Розпишемо кутове прискорення тіла як $\varepsilon = a_t / R = a / R$, де a_t - тангенціальне прискорення точок ободу пробірки, яке дорівнює прискоренню a центру мас тіла, оскільки пробірка котиться без проковзування. Враховуючи останнє співвідношення отримаємо:

$$F_{mp} = F - \frac{Ja}{R^2} \quad (1)$$

Силу F (рис. 3) знайдемо записавши другий закон Ньютона для поступального рівноприскореного руху тіла в системі відліку «Земля»:

$$\vec{F} + \vec{F}_{mp} + m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$$

$$Oz : F_{mp} - F \sin \alpha = ma \Rightarrow F_{mp} = F \sin \alpha + ma \quad (2)$$

Прирівнявши формули (1) та (2) отримаємо:

$$F \sin \alpha + ma = F - \frac{J a}{R^2}, \text{ звідки } J = \frac{(F(1 - \sin \alpha) - ma)R^2}{a} \quad (3)$$

Оскільки нитку вважаємо нерозтяжною, то прискорення центру мас тіла та прискорення поступального руху скріпки однакові і дорівнюють:

$$a = \frac{2h}{t^2} \quad (4)$$

де h - висота на яку опустилась скріпка під час руху і шлях, яки пододало тіло, рухаючись вздовж лінійки, t - час руху системи.

Щоб знайти силу F та кут α запишемо другий закон Ньютона для скріпки в системі відліку «Пробірка з пластиліном». Оскільки нитка нерозтяжна, то тангенціальне прискорення точок ободу пробірки в системі відліку «Земля» і прискорення скріпки в системі відліку «Пробірка з пластиліном» однакові. Із розстановки сил, які діють на скріпку (рис. 3) слідує:

$$\vec{F} + m_1\vec{g} + \vec{F}_{in} = m_1\vec{a}$$

$$Op : -F_{in} \cos \alpha + m_1 g \sin \alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{in}}{m_1 g} = \frac{m_1 a}{m_1 g}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g}$$

тоді

$$\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{a}{\sqrt{g^2 + a^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}$$

$$Oq : F - F_{in} \sin \alpha - m_1 g \cos \alpha = -m_1 a \Rightarrow$$

$$F = m_1 a \sin \alpha + m_1 g \cos \alpha - m_1 a$$

$$F = m_1 (g \cos \alpha - a(1 - \sin \alpha)) \quad (5)$$

Підставивши (5) в (3), отримаємо робочу формулу:

$$J = \frac{R^2}{a} (m_1 (g \cos \alpha - a(1 - \sin \alpha))(1 - \sin \alpha) - ma), \text{ де}$$

$$a = \frac{2h}{t^2}; \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{g^2 + a^2}}; \cos \alpha = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a^2}}$$

Отриману формулу можна значно спростити, скориставшись першим наближенням та врахувавши, що $a \ll g$, тоді $a^2 \ll g^2$, отже $\alpha \rightarrow 0$, тоді $\sin \alpha \rightarrow 0$, а $\cos \alpha \rightarrow 1$. Врахувавши це отримаємо:

$$J = \frac{R^2}{a} (m_1 (g - a) - ma)$$

$$J = \frac{R^2}{a} (m_1 g - ma), \text{ де } a = \frac{2h}{t^2}$$

В ході проведення експерименту було встановлено, що результат, обчислений за формулою, яка отримана першим наближенням, відрізняється від знайденого за більш точною робочою формулою не більше ніж на 3 %.

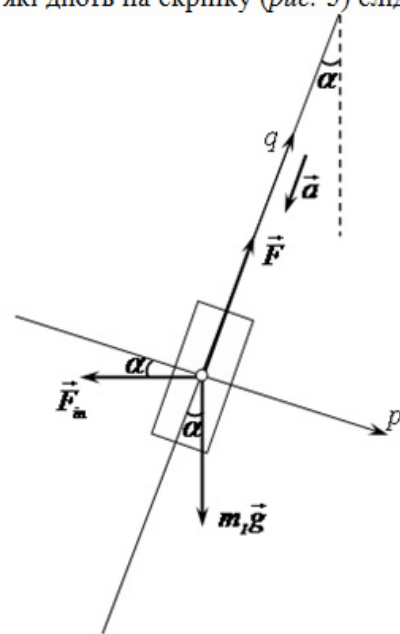


рис. 3

Причини похибок:

- інструментальні похибки;
- ми вважали нитки невагомою, що дало підставу моделювати рух тіла як рівноприскорений, хоча, при опусканні скріпки, сила, яка змушує тіло рухатись прискорено, зростає за рахунок розмотування нитки;
- ми не враховували ухил, який утворюється в результаті розміщення тіла на направляючих;
- похибки експериментатора.

КОНТРОЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Таблиця даних:

	$h, м$	$t, с$	$a, м/с^2$	$R \times 10^{-3}, м$	$m_1 \times 10^{-6}, кг$	$m \times 10^{-3}, кг$	$J \times 10^{-6}, кг \cdot м^2$
Плоске	0,23	2	0,12	9,2	0,4	15	1,6
Кругле	0,23	4	0,03	8,0	0,4	25	6,9

Розрахована відносна похибка складає 23 %

Відповідь: $M = (1,6 \pm 0,3) \cdot 10^{-6} кг \cdot м^2$ **Задача 2. Визначити густину матеріалу, з якого виготовлено тягарець зі шкільного набору.**

Ідея розв'язання. Маса тягарця добре відома (100 г), це можна перевірити й за допомогою динамометра. Отже, лишається знайти довжину ребра. Найкраще вимірити період коливань тягарця на гумовій нитці і з формули періоду коливань пружинного маятника знайти жорсткість нитки. Тоді видовження нитки під дією тягарця в рівновазі можна знайти. Порівнявши це видовження зі шкалою динамометра, фактично отримуємо лінійку (шкалу). Тепер за допомогою отриманої лінійки вимірюємо довжину ребра тягарця.