

1. Розв'яжіть рівняння

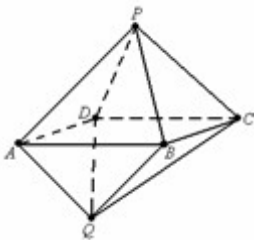
$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{3}{x^2 + 2x + 4} + \frac{5}{x^2 + 2x + 6} + \dots + \frac{2007}{x^2 + 2x + 2008} = 1004$$

2. Нехай p і $p+2$ – прості числа. Доведіть, що число $2p(p+1)(p+2)$ є спільним дільником таких чисел $p^{p+2} - p$ та $(p+2)^p - p - 2$.

3. Дано трикутник ABC . Точка M рухається по стороні BA , а точка N рухається по продовженню сторони AC за точку C так, що $BM = CN$. Знайдіть геометричне місце центрів кіл, описаних навколо трикутників AMN .

4. Нехай a, b і c – довільні дійсні числа. Доведіть нерівність:

$$(a^3 + b^3 + c^3)^2 \geq (a^4 + b^4 + c^4)(ab + bc + ca)$$



5. Многогранник $PABCDQ$ має вигляд, зображений на малюнку. Відомо, що $ABCD$ – паралелограм, площини трикутників PAC і PBD взаємно перпендикулярні, а також взаємно перпендикулярними є площини трикутників QAC і QBD . Кожну грань цього многогранника пофарбували в чорний або білий колір так, що грані, які мають спільне ребро пофарбовані в різні кольори. Доведіть, що сума квадратів площ чорних граней дорівнює сумі квадратів площ білих граней.