

Решение задачи 1

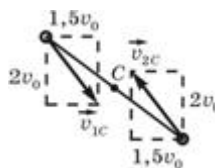
Перейдем в систему отсчета центра масс системы, скорость которой $\vec{v}_C = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}$. Скорости частиц в системе отсчета

центра масс $\vec{v}_{1C} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_2}{2}$ и $\vec{v}_{2C} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{2}$. Модули этих скоростей $2,5v_0$. В случае а) частицы движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой. Они столкнутся, произойдет аннигиляция. В случае б) начальные скорости частиц направлены вдоль разных прямых (см. рисунок).

Характер движения частиц определяется энергией W системы и моментом импульса L . Найдем эти величины:

$$W = -k \frac{e^2}{5a} + 2 \cdot \frac{m}{2} \cdot (2,5v_0)^2 = -k \frac{e^2}{5a} + 6,25mv_0^2 = -2,56 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$$

$$L = 2mav_0(2 \cdot 2 - 1,5 \cdot 1,5) = 3,5mav_0.$$



Поскольку $W < 0$, частицы будут двигаться по одинаковым эллипсам с общим фокусом в центре масс. Расстояния

минимального и максимального удаления от центра масс определяются из системы уравнений:

$$L = 2mvr.$$

$$W = -k \frac{e^2}{2r} + mv^2.$$

Отсюда $r_1 = 0,09a = 0,9 \text{ мкм}$ и $r_2 = 4,4a = 44 \text{ мкм}$.

Таким образом, минимальное расстояние между частицами $2r_1 = 0,18a = 1,8 \text{ мкм}$. Большая полуось каждого из эллипсов

$$f = (r_1 + r_2)/2 = 2,25a = 22,5 \text{ мкм}.$$

Согласно третьему закону Кеплера, период обращения T зависит только от большой полуоси орбиты (или, что то же самое, от энергии системы). Рассматривая движение частиц вокруг общего центра по окружностям радиуса f , получаем

$$T = \frac{4\pi f}{e} \sqrt{\frac{mf}{k}}. \quad \text{Тогда} \quad t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi f}{e} \sqrt{\frac{mf}{k}} = 42 \text{ нс}.$$

Ответ.

а) частицы столкнутся, произойдет аннигиляция;

б) 1,8 мкм, 42 нс.

Главная идея решения задачи 2:

Легко проверить, что токи разрядки конденсаторов пропорциональны их начальным зарядам (подбор численных значений параметров!). Поэтому отношение напряжений на конденсаторах все время остается 2:3, а отношение токов в

$$\frac{I_1}{I_2} = 2.$$

резисторах все время

$$\Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{I_1^2 R_1}{I_2^2 R_2} = 1,2.$$

$$Q_1 = \frac{3}{11} (C_1 U_1^2 + C_2 U_2^2) = 0,48 \text{ мДж}.$$

$$Q_2 = \frac{5}{22} (C_1 U_1^2 + C_2 U_2^2) = 0,4 \text{ мДж.}$$

Решение задачи 3

$$u = \frac{v}{\cos \alpha}$$

Раскладывая скорость ползуна на две составляющих, получаем $u = \frac{v}{\cos \alpha}$. Найдем сразу угловую скорость вращения наклонной части нити:

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{u \sin \alpha}{h / \sin \alpha} = \frac{v \sin^2 \alpha}{h \cos \alpha}$$

Тогда ускорение ползуна $a = -\frac{v}{\cos^2 \alpha} \cdot (-\sin \alpha) \cdot \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{v^2}{h} \operatorname{tg}^3 \alpha$

Расставив действующие на ползун силы и применив второй закон Ньютона, получим (следует учесть, что сила реакции

$$F = \frac{m(a - \mu g)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

стержня направлена вниз): (интересно, что если шнур не разрывается, то зона с углом

$$\alpha > \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\mu} \right) = 84^\circ \text{ недоступна.}$$

Для определения точки обрыва используем уравнение

$$T = \frac{m(v^2 \operatorname{tg}^3 \alpha_0 - \mu g h)}{h(\cos \alpha_0 - \mu \sin \alpha_0)}$$

Можно показать, что существует только одно решение α_0 , а при заданных численных значениях параметров легко

убедиться, что $\alpha_0 = 45^\circ$. Тогда $u = 10\sqrt{2}$ м/с, ползун не дошел к моменту обрыва 1 м до точки стержня, лежащей под

$$s = \frac{u^2}{2\mu g} = 100$$

кольцом. После обрыва нити ползун пройдет расстояние $s = 100$ м, т.е. окажется на расстоянии 99 м от указанной точки.

Решение задачи 4

Пусть α_n – угол между лучом в n-й пластинке и перпендикуляром к поверхности пластинок. Поскольку все углы малые (меньше 4°), можно заменять значение синуса угла значением угла в радианах, а косинусы углов считать равными

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{n_1}, \alpha_2 = \frac{\alpha}{n_1} \cdot 1,01, \alpha_3 = \frac{\alpha}{n_1} \cdot 1,01 \cdot 1,02 \approx \frac{\alpha}{n_1} \cdot (1 + 0,01 + 0,02), \dots$$

$$\alpha_{10} = \frac{\alpha}{n_1} \cdot 1,01 \cdot 1,02 \cdot \dots \cdot 1,08 \cdot 1,09 \approx \frac{\alpha}{n_1} \cdot (1 + 0,01 + 0,02 + \dots + 0,09)$$

единице. Тогда

Смещение луча после прохождения первой пластинки $\alpha d(1 - 1/n_1)$, второй – $\alpha d \left(1 - \frac{1 + 0,01}{n_1} \right)$, третьей – $\alpha d \left(1 - \frac{1 + 0,01 + 0,02}{n_1} \right)$ и т.д. до последней пластинки: $\alpha d \left(1 - \frac{1 + 0,01 + \dots + 0,08 + 0,09}{n_1} \right)$. Итого смещение луча:

$$\alpha d \left(10 - \frac{10 + 9 \cdot 0,01 + 8 \cdot 0,02 + 7 \cdot 0,03 + \dots + 2 \cdot 0,08 + 0,09}{n_1} \right) = \alpha d \left(10 - \frac{11,65}{n_1} \right) = 1,24 \text{ mm.}$$