Задача № 1

Розв'язання.

Маємо $(m^2-n)(m+n^2)=(m+n)^3$,

$m^3+m^2n^2-mn-n^3=m^3+3m^2n+3mn^2+n^3$,

$2n^3+3mn^2+3m^2n+mn-m^2n^2=0, \qquad \Big| : n>0$

$2n^2+3mn+3m^2+m-m^2n=0$,

$2n^2+(3m-m^2)n+(3m^2+m)=0, \qquad \Big| \cdot 8$

$16n^2+8(3m-m^2)n+8(3m^2+m)=0$,

$(4n+3m-m^2)^2-(3m-m^2)^2+8(3m^2+m)=0$,

$(4n+3m-m^2)^2=m^4-6m^3+9m^2-24m^2-8m$,

тобто $m^4-6m^3-15m^2-8m$ – квадрат цілого числа. Оскільки

$m^4-6m^3-15m^2-8m = m(m+1)^2(m-8)$, то $m(m-8)$ також квадрат цілого числа, тобто $m\geq 8$. Оскільки при $m\geq 13$ виконуються нерівності $(m-4)^2>m(m-8)>(m-5)^2$, то $m\in[8;12]$.

Далі, перебором, знаходимо:

при $m=8$, $n=+10$;

при $m=9$, $n=+6$ або $n=+21$;

при $m=10$, $n\notin N$;

при $m=11$, $n\notin N$;

при $m=12$, $n\notin N$.

Відповідь. $(m,n)=(8,10), (9, 6), (9, 21)$.

Задача №2.

Оскільки $\angle O_1BE = \angle O_2BF$ (як вертикальні), то з рівнобедреності трикутників BO_1E і BO_2F випливає, що $\angle BO_1E = \angle BO_2F$. Так як ці кути центральні, то $\angle EMB = ½\angle EO_1B = ½\angle FO_2B = \angle FNB$. Враховуючи, що $MN \| EF$, приходимо до висновку, що MEFN – рівнобедрена трапеція. Отже, навколо неї можна описати коло ω_3. Таким чином, наша задача звелася до відомо класичного результату: на площині задано три кола, які попарно перетинаються. Через точки перетину будь-яких двох з них проведена пряма. Тоді ці три прямі перетинаються в одній точці, яка називається радикальним центром цих трьох кіл.

Задача №3.

Розв'язання. Припустимо, що існує функція f: $R^+ \to R^+$, яка задовольняє нерівність

Враховуючи, що її значення додатнє, перепишемо її в такому вигляді:

Спочатку доведемо, що

для всіх $x>0$.

Очевидно, що f – спадна функція на R^+. Зафіксуємо $x>0$ і виберемо таке натуральне n, що . Тоді

(1)

(2)

……………………………………………………..

(n)

бо для всіх $k=0, 1, 2, \dots, n-1$. Додавши почленно нерівності (1), (2), ..., (n), одержимо: для всіх $x>0$.

Далі, нехай m таке натуральне число, що $m \geq 2f(x)$, тоді

Задача №4.

Відповідь: 3.

Задача №5.

Відповідь: 76 кулеметників. Приклад розташування: кулеметники стоять по периметру дошки і “стріляють” наружу.

Доведемо, що більшої кількості кулеметників розташувати неможливо. Розглянемо довільне роташування кулеметників, які не б’ють один одного. Внесемо в неї такі зміни: всіх кулеметників, які стоять на краю дошки, “розвернемо” так, щоб вони “стріляли” наружу, кожного кулеметника, який стоїть не на краю, посунемо на край в напрямку його “стрільби”. Зрозуміло, що кулеметники будуть стояти на різних клітинках і не будуть бити один одного. Тепер всі кулеметники стоять на краю дошки, отже, їх не більше 76.