

1. Розглянемо трикутник  $ABC$ , в якому  $AB > AC$ . Нехай  $P$  і  $Q$  – основи перпендикулярів, опущених з вершин  $B$  і  $C$  на бісектрису кута  $BAC$  відповідно. На прямій  $BC$  відмітили точку  $D$  таку, що  $AD \perp AP$ . Доведіть, що прямі  $BQ$ ,  $PC$  і  $AD$  перетинаються в одній точці.

2. Довести, що при будь-яких додатних  $a$ ,  $b$ ,  $c$  виконується нерівність

$$-1 < \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2003} + \left(\frac{b-c}{b+c}\right)^{2003} + \left(\frac{c-a}{c+a}\right)^{2003} < 1$$

3. Чи існує таке просте число  $p$ , що серед членів послідовності  $\sqrt{2^p + 3^p}$ ,  $\sqrt[3]{2^p + 3^p}$ ,  $\sqrt[4]{2^p + 3^p}$ ,  $\sqrt[5]{2^p + 3^p}$ , ... є ціле число?

4. Про функцію  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  відомо, що для всіх натуральних  $n$

$$f(n) = 1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + (n-2)^3 + (n-1)^2 + n^1$$

Знайти найменш можливе значення виразу  $f(n+1)/f(n)$ .

5. В ККЗ “Райдуга” міста Вінниці 1500 місць. Адміністрація гурту “Океан Ельзи”, який виступатиме в “Райдузі” 7 травня, досліджує залежність одержаного прибутку від вартості квитків. Якщо вартість одного квитка складатиме 100грн., то продадуть 200 квитків, якщо ж вартість одного квитка становитиме 50 грн., то продадуть 1000 квитків. Запропонуйте оптимальну вартість квитка, щоб прибуток був найбільш можливим. Знайти його.